


FONDO PIZZOFALCONE

COURS

DE

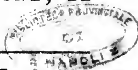
MATHÉMATIQUES.

COURS DE MATHÉMATIQUES,

PAR

CHARLES BOSSUT,

MEMBRE DE L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES ET DES ARTS, DES ACADÉMIES DE PÉTERSBOURG, DE BOLOGNE, DE TURIN, etc.



TOME TROISIEME.

MÉCANIQUE.

NOUVELLE ÉDITION, REVUE, ET A LAQUELLE L'AUTEUR A AJOUTÉ UN OUVRAGE ANALOGUE, INTITULÉ: RECHERCHES SUR L'ÉQUILIBRE DES VOUTES.



A PARIS,

RUE DE THIONVILLE, n° 116,

Chez Firmin Didot, libraire pour les mathématiques et l'architecture.

AN X — 1802.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

La mécanique des corps solides, dont il est question dans cet ouvrage, se divise en deux parties : l'une, appelée *statique*, considere l'état d'équilibre, ou les rapports qu'ont entre elles plusieurs forces qui se combattent et qui anéantissent leurs effets réciproques et opposés ; l'autre, appelée *mécanique proprement dite*, ou plus simplement *dynamique*, a pour objet les proprietés du mouvement, considéré en lui-même, ou produit par l'action et la réaction que plusieurs corps exercent les uns sur les autres.

Je traiterai successivement ces deux parties. Mon but principal est d'instruire les commençants ; mais, en expliquant les *éléments* de la mécanique, j'offre aux géometres les données nécessaires pour résoudre les différentes questions qui appartiennent à cette science.

Si l'antiquité de la mécanique datoit de l'usage qu'on a fait nécessairement du levier, ou de quelques autres machines simples, aussitôt qu'on a voulu construire des cabanes, des instruments propres au labourage, etc., elle remonteroit presque à l'origine des sociétés. Mais ces pratiques informes et grossieres n'étoient pas fondées sur

des principes scientifiques. On voit, par quelques écrits d'Aristote, qu'au temps où il a vécu, les philosophes n'avoient encore que des notions confuses, ou même fausses, sur la nature de l'équilibre. Archimede doit être regardé comme le vrai inventeur de la statique. Il trouva la propriété générale du centre de gravité, et il détermina ce point dans plusieurs figures, telles que le parallélogramme, le triangle, la parabole, etc. Il fit voir que deux poids suspendus aux deux extrémités d'une balance, et en équilibre, sont réciproquement proportionnels à leurs distances au point d'appui; d'où résultoit toute la théorie du levier. Il étendit cette théorie à plusieurs autres machines qu'il imagina. On lui doit, par exemple, le plan incliné, la vis ordinaire, une sorte de vis qui porte son nom, et qui sert à élever de l'eau par un mouvement continu. Tous les historiens parlent de l'étonnement où il jeta ses compatriotes, et de la terreur qu'il répandit dans l'armée romaine, par les effets inouis de ses machines, au siege de Syracuse. Un ingénieur romain, nommé Appius, faisoit jouer plusieurs grosses machines pour rompre la muraille qui entouroit la ville; mais *Archimede* (1) *ne se soucioit point de tout cela, comme aussi n'étoit-ce rien auprès des engins qu'il avoit inventés : non que lui en fît autrement*

(1) Plutarque, vie de Marcellus. Je me sers de la traduction d'Amyot.

cas ny compte, ne qu'il les eût faits comme chefs-d'œuvre pour montrer son esprit, car c'étoient pour la plupart jeux de géométrie qu'il avoit faits en s'ébattant par maniere de passe-temps, à l'instance du roi Hieron, lequel l'avoit prié de révoquer un petit la géométrie de la spéculation des choses intellectives à l'action des corporelles et sensibles, et faire que la raison démonstrative fût un peu plus évidente et plus facile à comprendre au commun peuple, en la meslant par expérience matérielle à l'utilité de l'usage. Voyez dans Plutarque même l'histoire de la résistance que les machines d'Archimede opposerent à la prise de Syracuse.

En reconnoissant que les modernes tiennent d'Archimede les principes de la statique, nous devons ajouter, avec la même équité, qu'ils les ont généralisés et perfectionnés. Quant à la théorie du mouvement, il paroît qu'elle n'a pas été connue des anciens. Je parle des mouvements variés : car le mouvement uniforme n'a aucune difficulté ; et du moment qu'on y a fait attention, ses propriétés se sont présentées d'elles-mêmes. Galilée trouva, au commencement du XVII[e] siecle, la loi de l'accélération des graves. On voyoit bien qu'une pierre qui tombe acquiert d'autant plus de vîtesse qu'elle tombe de plus haut ; mais on ignoroit et Galilée détermina la proportion exacte suivant laquelle la vîtesse augmente. Cette découverte le conduisit à une théorie complete du mouvement uniformé-

ment accéléré. Descartes se trompa, du moins en partie, dans les regles qu'il voulut établir pour déterminer les mouvements qui résultent de la percussion mutuelle des corps. Huguens, Wren et Wallis donnerent les vraies lois de ces mouvements. Bientôt l'analyse infinitésimale fut inventée, et devint entre les mains des modernes un instrument qu'ils appliquerent à toutes les parties des mathématiques. Je ne finirois point si je voulois rapporter en détail les découvertes qu'ils ont faites, par ce moyen, dans la mécanique, et surtout dans la théorie des mouvements produits par l'action et la réaction que les corps d'un même système exercent les uns sur les autres : on peut consulter les traités particuliers de mécanique qu'ils ont écrits, et les mémoires des plus célebres académies de l'Europe. Je reviens à mon ouvrage.

PREMIERE PARTIE.

STATIQUE.

Presque tous les auteurs élémentaires de statique se bornent à considérer l'état d'équilibre relativement aux machines. Ici j'envisage la statique sous un point de vue plus étendu : je commence par établir les conditions générales de l'équilibre ; ensuite j'en fais l'application au cas particulier des machines.

Chaque science est fondée sur quelques axiomes

ou propositions dont la vérité est évidente par elle-même. Ainsi, dans la statique, on regarde comme des axiomes, qu'un point sollicité au mouvement par plusieurs forces, ne peut prendre qu'un seul chemin; que deux forces égales et directement opposées se détruisent; qu'une force appliquée à un corps, perpendiculairement à une ligne ou à un plan, n'ayant pas plus de tendance à mouvoir le corps dans un sens que dans un autre, parallèlement à cette ligne ou à ce plan, ne doit engendrer aucun mouvement de cette espece. Tels sont les caracteres qui me servent à reconnoître et à établir l'équilibre dans les différentes combinaisons de forces, qui peuvent avoir lieu. Parcourons rapidement ces combinaisons.

La premiere et la plus simple de toutes est celle des forces qui agissent suivant une même ligne droite, les unes d'un côté, les autres du côté opposé. On prouve sans peine que toutes les forces dirigées d'un même côté produisent une résultante égale à leur somme. De là, pour qu'il y ait équilibre dans le cas présent, il faut que la somme de toutes les forces qui tirent, par exemple, de gauche à droite, soit égale à la somme de toutes les forces qui tirent de droite à gauche.

Les forces, dont les directions concourent en un même point, forment une seconde classe fort étendue. En prenant d'abord deux de ces forces, elles ont une résultante exprimée par la diagonale d'un parallélogramme construit sur leurs direc-

tions. Cette résultante, combinée avec une troisieme force, produit une résultante exprimée par la diagonale d'un second parallélogramme analogue au premier; ainsi de suite. Par ce moyen, toutes les forces proposées se réduiront à deux seulement, lesquelles, en vertu de l'équilibre, seront égales et directement opposées.

On peut rapporter à la méme classe les forces dont les directions sont paralleles; car des lignes paralleles peuvent être regardées comme concourantes en un même point infiniment éloigné. Si l'on considere deux de ces forces, qui agissent d'un méme côté, on trouve qu'elles produisent une résultante qui leur est parallele, et qui est égale à leur somme, de même que si elles agissoient en ligne droite. De plus, la direction de cette résultante partage la distance des directions des forces composantes en parties réciproquement proportionnelles aux quantités des mêmes forces. On formera pareillement une seconde résultante, en combinant celle dont nous venons de parler, avec une troisieme force. Ainsi on parviendra, comme tout-à-l'heure, à deux forces finales, qui seront égales et directement opposées, pour satisfaire au principe fondamental de l'équilibre. Je n'ai pas besoin de faire observer qu'on pourroit regarder comme un cas particulier des forces paralleles celui des forces qui agissent suivant une méme ligne droite.

Les forces paralleles ont un grand nombre de

propriétés que je démontre en détail, et d'une maniere nouvelle à quelques égards. Ces propriétés sont curieuses par elles-mêmes, et servent à abréger extrêmement plusieurs recherches de mécanique.

A mesure que nous avançons, les problêmes se compliquent et se généralisent. Après avoir déterminé l'équilibre des forces concourantes en un même point, ou paralleles entre elles, nous voici parvenus à la considération des forces qui ont des directions quelconques. Figurons-nous donc qu'à différents points d'un corps solide, de grandeur sensible, parfaitement libre d'ailleurs, sont appliquées des forces qui le tirent ou le poussent, suivant telles directions qu'on voudra imaginer. Il seroit difficile de réduire immédiatement l'état de ces forces aux lois primordiales de l'équilibre. Mais on peut parvenir à ce but, en s'aidant des propositions déja démontrées, et en observant que chaque force en particulier peut être décomposée en trois autres, paralleles à trois lignes données de position. Qu'on mene dans l'espace trois lignes fixes, et qui se croisent perpendiculairement entre elles en un même point. Chaque puissance appliquée au corps ayant été décomposée en trois autres, paralleles à ces trois lignes, et considérant que toutes les forces paralleles qui agissent dans le même sens sont réductibles à une seule force égale à leur somme; il est aisé de voir que toutes les puissances proposées, en quelque nom-

bre qu'elles soient, et de quelque maniere qu'elles soient dirigées, pourront être réduites à six forces paralleles à nos trois lignes. Des deux forces paralleles à une même ligne, l'une tire de gauche à droite, l'autre de droite à gauche. Cela posé, je trouve les conditions de l'équilibre d'une maniere nouvelle, et qui ne me paroît rien laisser à desirer du côté de la simplicité. J'exprime ces conditions par six équations générales, qui font voir, 1°. que, pour chaque paire de forces qui agissent parallèlement à la même ligne, la force qui tire de droite à gauche doit être égale à la force qui tire de gauche à droite; 2°. que la somme des énergies ou moments des forces qui tendent à faire tourner le corps, en un sens, autour de chacune de nos trois lignes, doit être égale à la somme des moments des forces qui tendent à le faire tourner dans le sens contraire. Ce problême est le plus composé de toute la statique; et il est susceptible d'une infinité d'applications particulieres, à l'aide du calcul et de la géométrie. Lorsque le corps auquel les forces sont appliquées est arrêté par un point fixe autour duquel il a d'ailleurs entiere liberté de pouvoir pirouetter en toutes sortes de sens, il n'y a plus que les trois dernieres équations qui soient nécessaires pour l'équilibre; et elles comprennent toute la théorie de l'équilibre du levier ordinaire, envisagée sous le point de vue le plus général.

Il y a, dans les corps soumis à l'action de la

pesanteur, un point remarquable, qu'on appelle *centre de gravité*. La détermination de ce point et des propriétés qui lui appartiennent est une branche de la composition et décomposition des forces paralleles. On trouve, dans la plupart des livres de mécanique, que le centre de gravité est un point par lequel un corps étant suspendu en différents sens, demeurera immobile dans toutes les situations possibles. Cela suppose, comme on voit, qu'en attachant le corps par différents points à un cordon, tous les prolongements de ce cordon se croiseront au centre de gravité. Or cette assertion est-elle évidente par elle-même, et n'avoit-elle pas besoin d'être démontrée? Je fais voir très simplement qu'elle est en effet exacte, et par-là je leve le doute légitime qu'on pouvoit avoir à ce sujet.

L'équilibre des machines est la partie, sinon la plus difficile, du moins la plus utile de la statique, par les services continuels qu'elle rend à la société. Il étoit donc essentiel de la traiter avec clarté et précision. Je n'ai rien négligé pour remplir cet objet.

La plupart des hommes qui n'ont pas fait une étude approfondie des lois générales de l'équilibre ont des idées bien peu justes de l'effet des machines. Il y a des gens qui, nés avec de l'adresse dans les doigts, et même avec de l'imagination, ne voient que confusément le produit de la combinaison des différentes pieces qui composent une

machine, parcequ'ils sont dépourvus de principes puisés dans la saine théorie. Ils ont néanmoins, pour l'ordinaire, beaucoup d'assurance; ils annoncent avec emphase les prétendues merveilles de leurs inventions en ce genre. S'ils rencontrent des incrédules, ils leur citeront en exemple la proposition que faisoit Archimede, bien digne d'inspirer la confiance, de soulever le globe de la terre, pourvu qu'on lui donnât un point fixe pour attacher son levier. Voyons si cet exemple conclut en leur faveur; et apprécions l'espérance qu'on peut justement concevoir d'une machine.

Le mouvement ne peut pas naître de lui-même. Il est essentiellement produit par quelque agent extérieur qui tire la matiere de l'état de repos, ou qui accélere l'impulsion qu'elle peut avoir déja reçue. Or la force que l'agent dépense pour cela est nécessairement limitée. Par exemple, qu'un homme traîne une pierre sur le terrain, il perdra une certaine partie de sa force contre cette masse; et si, à raison de son poids et du frottement, la pierre oppose une résistance que l'agent ne puisse surmonter, il n'y aura point de mouvement. Supposons que la pierre marche: nous pouvons concevoir que la force entiere et absolue de l'homme est partagée en trois autres; la premiere, qui lui reste, et en vertu de laquelle il marche lui-même; la seconde, qui est absorbée par la résistance des frottements; la troisieme, qui est employée à faire marcher la pierre. Cette derniere est proprement

ce qu'on appelle la *force mouvante ;* elle est mesurée par le produit de la masse qu'elle meut, et de la vîtesse qu'elle lui imprime. Il en est de méme pour toutes les autres especes d'agents, proportion gardée : on peut considérer en général toute force mouvante, comme ayant pour éléments ou facteurs un poids et une vîtesse. Je n'examine point si, dans l'hypothese proposée, il n'y a pas, relativement à la maniere dont un animal tire sa force du jeu de ses muscles, une vîtesse propre à rendre la dépense d'action extérieure qu'il peut faire, la plus grande qu'il est possible. Pour écarter cette question, qui appartient à l'économie des forces animales, si je puis m'exprimer ainsi, et pour réduire le probléme à ses plus simples termes, je suppose que chaque agent est employé de la façon la plus avantageuse, et que par conséquent il donne à la machine toute la force qu'il peut lui donner réellement. Nous avons donc une force mouvante, fixe et déterminée, qui servira à vaincre une certaine résistance, ou, ce qui revient au méme, à élever un certain fardeau. Elle demeurera toujours la méme, quelques moyens qu'on emploie pour la transmettre au fardeau dont il s'agit. Vainement, dans la vue de l'augmenter, vous multiplierez les leviers et les roues : tous ces instruments n'ont par eux-mémes aucune vertu active ; ils n'ont de force qu'autant qu'ils en reçoivent; souvent méme ils absorbent en pure perte une partie de la force mouvante, soit par les points

fixes et destructeurs qu'ils lui présentent, soit par le frottement et les autres résistances qu'ils occasionnent. Leur véritable destination ne peut donc être que de modifier différemment la force mouvante, en la transportant au fardeau à élever. S'ils font augmenter ce fardeau, ils font diminuer sa vîtesse en même rapport; si au contraire ils augmentent la vîtesse, c'est aux dépens de la masse. Archimede avoit raison de dire qu'avec un levier et un point fixe, il souleveroit le globe de la terre. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur une balance dont les bras sont inégaux. Plus l'un des bras est long, par rapport à l'autre, plus il favorise le poids attaché à son extrémité; en sorte qu'en augmentant de plus en plus cette longueur, il n'y aura pas de bornes à la diminution du poids qui lui est appliqué. Dans les machines où il est ainsi question simplement d'établir l'équilibre, les forces, par la maniere dont elles sont situées, peuvent différer extrêmement en quantités. Mais la plupart des machines ont pour objet de produire du mouvement; et alors, la force mouvante étant toujours la même, le fardeau élevé sera plus ou moins grand, selon qu'il prendra moins ou plus de vîtesse. Vous pouvez donc, par exemple, avec un poids d'une livre appliqué à l'extrémité d'un bras de levier de dix pieds, faire équilibre à un poids de dix livres, appliqué à l'extrémité de l'autre bras, qui est d'un pied: mais si vous voulez produire du mouvement, et si vous supposez que

la force mouvante soit le poids d'une livre, animé d'une vîtesse capable de lui faire parcourir un pied en une seconde; le fardeau élevé, c'est-à-dire le poids de dix livres, ne parcourra pendant le même temps que la dixieme partie d'un pied; car les vîtesses des deux poids peuvent être représentées par les arcs semblables qu'ils décrivent dans le même temps, et ces deux arcs sont entre eux comme leurs rayons ou les bras du levier. Il est clair par-là que si Archimede avoit réellement eu les choses qu'il demandoit pour faire monter le globe de la terre, il se seroit passé un temps assez considérable, avant que cette masse énorme prît un mouvement sensible. Quel est donc précisément le but des machines? La réponse est aisée, et suit de ce qu'on vient de dire. Les machines servent à transmettre, suivant une certaine loi, la force mouvante au fardeau qu'on veut élever. Elles nous offrent la facilité d'augmenter ce fardeau, ou sa vîtesse; et cette alternative est infiniment précieuse: car il arrive très souvent qu'on a besoin d'élever un fardeau considérable, et qu'on n'est pas pressé par le temps; d'autres fois on veut se procurer une grande vîtesse, et non élever un grand fardeau. Vous avez le moyen de remplir l'une ou l'autre condition. Mais une machine, quelle qu'elle soit, ne vous fera jamais rien gagner d'un côté, que vous ne le perdiez de l'autre. Voilà le cercle nécessaire dont il n'est pas possible de sortir.

Mais, dira-t-on, si, dans toutes les machines, le fardeau élevé et sa vîtesse sont réciproquement proportionnels, elles sont donc toutes également avantageuses; et il est inutile de travailler à en imaginer de nouvelles. Ceci a besoin d'être expliqué.

On compte sept machines simples et primitives: la machine funiculaire, le levier, la poulie, le tour, le plan incliné, la vis, et le coin. Toutes les autres machines faites ou à faire ne peuvent être que des combinaisons de ces sept-là, ou de la même, répétée un certain nombre de fois. Les machines simples ont chacune leurs propriétés, leur objet particulier, et toute la perfection dont elles sont susceptibles. Elles ne peuvent se comparer ensemble que dans un sens fort impropre, puisqu'elles ont différentes destinations. Ainsi la question, s'il y a des machines plus parfaites les unes que les autres, ne doit pas les regarder; mais elle peut être proposée relativement aux machines composées. Or l'usage de ces dernieres est fréquent et indispensable, car il arrive rarement qu'on puisse produire l'effet dont on a besoin, par le moyen d'une machine simple. Lorsque vous êtes donc obligé d'employer une machine composée, ne la compliquez du moins qu'autant qu'il est absolument nécessaire; évitez, le plus que vous pourrez, les frottements et les autres résistances étrangeres au produit effectif que vous voulez obtenir. La machine la plus parfaite en ce genre est celle où la force mouvante se transmet, avec le

moins de déchet qu'il est possible, au fardeau à élever. Travaillez à diminuer ce déchet : vos recherches auront un but très réel et très utile ; mais tenez-vous-en là ; ne nous promettez rien de plus. Tout autre avantage que vous voudrez attribuer à vos machines est une chimere.

Ces réflexions générales deviennent sensibles par les détails dans lesquels j'entre au sujet des sept machines simples. On conçoit qu'il n'est guere possible de dire des choses nouvelles sur une matiere si rebattue. Cependant on trouve ici des démonstrations qui ne sont point ailleurs, et qui ont l'avantage d'être fort simples. En traitant du levier, je donne la théorie de l'équilibre des ponts-levis, théorie qui n'est expliquée, du moins que je sache, dans aucun livre de mécanique.

Je ne me suis pas borné à considérer l'équilibre mathématique des machines. J'examine les résistances qu'elles éprouvent dans leur état physique et naturel, lorsqu'elles sont prêtes à se mouvoir. Le frottement et la difficulté que les cordes ont à se plier autour des cylindres qu'elles embrassent, opposent des obstacles plus ou moins sensibles à la génération du mouvement. Il suffit de réfléchir un peu sur la nature de ces résistances, et sur l'impossibilité absolue de les anéantir totalement, pour reconnoître la chimere du mouvement perpétuel. On est très éloigné de pouvoir évaluer le frottement et la roideur des cordes, avec une précision géométrique. Cependant cette théorie a fait

des progrès, depuis qu'on a commencé à s'en occuper; elle en peut faire de plus grands encore, avec le secours de l'expérience. Je la développe en détail, et j'en fais l'application à des exemples dont la pratique retirera quelque fruit. Il étoit ainsi nécessaire, pour compléter la statique élémentaire, que, joignant la théorie physique des machines à celle de leur équilibre mathématique, je déterminasse, du moins autant qu'il est possible, le point où l'équilibre est prêt à se rompre pour faire place au mouvement.

SECONDE PARTIE.

DYNAMIQUE.

La dynamique, ou la science du mouvement, est ici divisée en deux livres.

Dans le premier, je considere les propriétés générales du mouvement, de quelque maniere qu'il ait été produit. Or, tout étant comparaison dans les mathématiques, la question est de rapporter les circonstances d'un mouvement, c'est-à-dire l'espace parcouru par un corps, le temps de son mouvement, sa vitesse, et la force dont il est animé, aux quantités analogues d'un autre mouvement donné; en sorte que, tout étant connu dans celui-ci, tout le sera également dans l'autre.

Suivant ce principe, je donne d'abord les formules des mouvements uniformes, et j'en fais

l'application à plusieurs exemples. De-là je passe aux mouvements variés; j'explique en détail la théorie du mouvement uniformément accéléré ou retardé : théorie d'où je tire, comme corollaire, tout ce qui est relatif aux mouvements des corps qui tombent librement par la pesanteur, ou qui glissent sur des plans inclinés.

Les propriétés du mouvement des centres de gravité forment une classe particuliere, d'autant plus digne d'attention, qu'indépendamment de tout objet de curiosité, elles s'appliquent à plusieurs recherches importantes d'utilité pratique, telles que le toisé de l'étendue, la portée moyenne des terres dans les déblais et les remblais, etc. Elles sont fondées sur cette proposition remarquable : *Lorsque plusieurs corps, formant ou considérés comme formant un même systéme, ont des mouvements semblables, dans des plans quelconques, les mêmes, ou différents; le centre de gravité de tout le systéme se meut aussi semblablement, ou demeure en repos.* Personne, avant moi, n'avoit démontré cette proposition d'une maniere directe et générale. Newton et plusieurs autres géometres célebres n'étoient parvenus à en reconnoître la vérité, qu'en décomposant les mouvements en d'autres mouvements paralleles à des lignes données de position dans l'espace : décomposition à laquelle je suis dispensé de recourir, au moyen d'un théorême de géométrie, que j'ai démontré le premier dans toute sa

généralité. Je dois cependant ajouter que Camus, dans ses *éléments de statique*, a aussi évité la décomposition ; mais il divise les espaces parcourus par les corps en parties infiniment petites, suivant une proportion particuliere, qui, quoique permise, limite la rigueur et la généralité de la démonstration.

Le second livre a pour objet les lois de la communication des mouvements. Je suppose qu'on imprime du mouvement à un systéme de corps qui agissent les uns sur les autres, soit en se choquant, soit par l'interposition de leviers, de fils, etc. : il est évident que ces corps ne se mouvront pas de la même maniere que si chacun d'eux étoit libre, mais qu'en vertu des résistances qu'ils s'opposent réciproquement, les uns perdront du mouvement, les autres en gagneront, et qu'il y aura toujours équilibre entre les mouvements perdus et les mouvements gagnés. Ainsi on connoîtra les mouvements que les corps auront en effet, en exprimant les conditions de cet équilibre par des équations. Tel est le principe général auquel je rappelle la détermination des mouvements forcés d'un systéme quelconque de corps. Les applications particulieres développent l'esprit et l'usage de la méthode.

Je donne d'abord les formules générales du choc des corps, soit que la percussion se fasse directement, soit qu'un corps en rencontre tout à la fois un nombre quelconque d'autres, disposés

comme on voudra par rapport à sa direction. La seule limitation qu'il y ait à la généralité de ces problêmes, est que les corps sont supposés sphériques, ou que les forces perpendiculaires à leurs surfaces, aux endroits des contacts, passent par leurs centres de gravité particuliers. Mais, pour résoudre le cas où la percussion seroit excentrique, et en général toutes les questions du méme genre, j'examine les mouvements d'un corps libre de figure quelconque, qui est frappé ou poussé suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité. Je démontre très simplement qu'alors le centre de gravité du corps se meut de méme que s'il se trouvoit sur la direction de la force motrice, et qu'en méme temps le corps tourne, du moins au premier instant, autour du centre de gravité, de méme que si ce point étoit fixe. Ce théoréme général est éclairci par des exemples. Je donne ensuite plusieurs problémes concernant le mouvement des corps qui agissent les uns sur les autres par des leviers, par des fils, ou de toute autre maniere. Les fameux problémes du centre d'oscillation et du centre de percussion trouvent ici leurs places. Les solutions que j'en donne, et principalement celle du probléme du centre de percussion, sont nouvelles, et de plus ont l'avantage particulier d'étre très directes et très completes. Nos lecteurs pourront se proposer eux-mêmes d'autres problêmes analogues : s'ils ont bien saisi les principes que j'ai tâché d'expli-

quer, ils ne trouveront guere dans ces recherches d'autres difficultés que celles qui dépendent de la géométrie et du calcul. Je finis par des considérations mathématiques et physiques sur les machines en mouvement.

Ce traité est accompagné de quelques notes : la plupart ont pour but d'approfondir certaines théories qui demandent la connoissance du calcul intégral. Je donne, par exemple, les formules générales pour la détermination de toutes sortes de mouvements variés, rectilignes ou curvilignes : je les applique au mouvement des corps qui tombent suivant une loi quelconque, aux oscillations dans des arcs de cercle de grandeur arbitraire, au probléme général des forces centrales, à celui de la plus vîte descente, etc. Les autres questions relatives au mouvement se résolvent par les mêmes principes.

A cette nouvelle édition, j'ai ajouté des *recherches sur l'équilibre des voûtes*, dont je rends compte dans l'introduction qui les précede.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE MÉCANIQUE.



NOTIONS GÉNÉRALES.

1. Sous le nom de *Mécanique*, pris dans l'acception la plus étendue, on comprend la science de l'équilibre et du mouvement des corps solides ou fluides; mais, dans l'acception ordinaire que j'adopte ici, le nom et la définition se rapportent aux sorps solides, les seuls dont je me propose de considérer l'équilibre et le mouvement dans cet ouvrage.

2. On appelle en général *corps* l'assemblage d'une infinité de particules de matiere. Lorsque ces molécules sont adhérentes les unes aux autres, et ne cedent qu'avec peine à leur séparation mutuelle, le corps est appelé *solide*; et il a plus ou moins de solidité, selon que cette adhérence est plus ou moins forte: mais si les parties sont détachées les unes des autres, et ont la liberté de changer de place sans difficulté, le corps est appelé *fluide* ou *liquide*.

3. La propriété caractéristique et essentielle des corps est l'impénétrabilité mutuelle de leurs parties. En effet, il est impossible que deux différentes parties de matiere occupent un seul et même espace indivisible.

Un corps, en conservant toujours la même quantité de matiere, peut changer de figure, de couleur, de place, etc.; on peut lui faire perdre l'exercice de sa pesanteur, en le soutenant par une corde, ou en le faisant flotter sur un fluide; mais il ne peut jamais cesser d'être impénétrable, sans cesser d'exister.

4. Tous les corps laissent des interstices, ou des *pores* entre les parties dont ils sont composés; d'où il résulte que ces parties peuvent se rapprocher ou s'écarter par la compression, le froid, le chaud, ou de toute autre maniere, en sorte que le corps paroîtra diminuer ou augmenter de grandeur. Cette propriété donne lieu de distinguer la *masse* d'un corps d'avec son *volume*.

5. Par la masse d'un corps, on entend la quantité de matiere propre dont il est composé, laquelle est représentée par le poids; le volume est l'espace apparent qu'il occupe, ou l'extension du corps suivant les trois dimensions, longueur, largeur, et profondeur. La géométrie mesure les volumes; la mécanique ne considere que les masses : cependant il faut remarquer que, dans les corps composés d'une matiere homogene dans toute son étendue, la masse peut être représentée par le volume, l'une étant alors proportionnelle à l'autre.

6. Le rapport de la masse au volume, c'est-à-dire la quantité de matiere que contient un corps sous un volume *donné*, est ce qui en forme la *densité*. On voit assez qu'un corps n'est appelé plus ou moins dense que par comparaison à un autre corps. Or, pour faire une telle comparaison, il faut diviser les masses par le nombre de mesures de leurs volumes, c'est-à-dire par le nombre de toises cubes, de pieds cubes, etc.. qu'elles contiennent : les quotients, qui sont des masses comprises sous l'*unité de volume*, expriment les densités. Ainsi, si l'on a deux corps A et B, et

qu'on nomme G et γ leurs volumes ou grandeurs, D et δ leurs densités, on aura la proportion, $D : \delta :: \frac{A}{G} : \frac{B}{\gamma}$; donc $A : B :: GD : \gamma\delta$, c'est-à-dire que les *masses sont en raison composée des volumes et des densités.*

7. Les métaphysiciens ont épuisé leur subtilité sur la nature de l'espace et du vuide, sans pouvoir parvenir à s'accorder entre eux sur les notions qu'ils vouloient donner de ces deux êtres. Je serois trop long, et ce détail n'auroit d'ailleurs aucune utilité, si je voulois rapporter ici toutes leurs disputes à ce sujet. Il nous suffit de considérer l'espace ou le vuide (car je prends ces deux mots dans le même sens) comme étendu, pénétrable, capable de recevoir les corps, et de leur donner un libre passage en toutes sortes de sens.

8. On distingue deux sortes d'espaces, l'espace *absolu* et l'espace *relatif*. L'espace absolu existe, ou peut être conçu exister en lui-même, sans relation aux choses externes; en sorte que, si tous les corps étoient anéantis, il n'en subsisteroit pas moins. L'espace relatif est déterminé, et tombe sous nos sens par sa relation aux corps: par exemple, une chambre, qui est terminée par les quatre murailles, le plancher et le plafond, est un espace relatif.

9. Lorsqu'un corps demeure constamment dans un même endroit de l'espace, c'est-à-dire lorsqu'il conserve la même situation par rapport à toutes les parties fixes de l'espace, il est en *repos*; quand il change de place, ou qu'il répond successivement à différents points de l'espace, il est en *mouvement*. L'un ou l'autre état est absolu ou relatif, selon que l'espace dans lequel on imagine que le corps se trouve est absolu ou relatif.

10. On a autant écrit, et avec le même succès, sur le *temps* que sur l'espace. Nous nous contenterons de regarder

le temps comme produit par l'écoulement successif et uniforme de l'instant qui en est l'origine ou l'élément, de même qu'en géométrie on regarde la ligne comme produite par le mouvement du point qui est l'une de ses extrémités.

11. Le temps, considéré en lui-même, et indépendamment de toute relation aux choses externes, s'appelle *temps absolu;* mais, lorsqu'on le prend pour exprimer la durée successive des êtres, il s'appelle *temps relatif.* On n'a besoin, dans la mécanique, que du temps relatif; et nous l'appellerons simplement *temps.*

12. Nous mesurons le temps, en le rapportant à un certain mouvement, pris pour unité, qui demeure ou qu'on imagine demeurer toujours égal et uniforme. Cette mesure n'est pas la même chez tous les peuples. Les uns la reglent sur le cours apparent du soleil; d'autres sur celui de la lune ou des étoiles. Nous adopterons le premier usage, qui est le plus généralement reçu. Ainsi l'intervalle de temps, que nous appelons *année*, est représenté par l'espace que le soleil parcourt dans le ciel, depuis son point de départ d'un certain endroit jusqu'à ce qu'il revienne au même endroit. Cet espace peut être peint sous l'image d'une ligne droite, qu'une mouche parcourroit d'une marche toujours égale. Je dis *toujours égale:* car, quoique le mouvement du soleil ne soit pas exactement uniforme, les astronomes corrigent ces inégalités; et, par la distribution qu'ils en font sur la totalité du mouvement, ils forment un mouvement *moyen*, qu'on peut regarder comme uniforme.

L'année se divise, comme on sait, en *mois*, *jours*, *heures*, *minutes*, *secondes*, etc. Les rapports de ces quantités sont trop connus pour que je m'arrête à les expliquer.

Du reste, quelque mouvement qu'on choisisse pour servir de mesure ou d'*échelle* au temps, tous les différents temps que l'on considérera dans la mécanique seront comparés formellement ou tacitement au mouvement pris pour unité.

On concevra clairement ces rapports, en représentant les mouvements auxquels les temps sont proportionnels, par des lignes droites qui seroient parcourues de la même maniere par un mobile.

13. Un corps se meut plus ou moins *vîte*, selon qu'il parcourt plus ou moins d'espace en un temps donné. La *vîtesse* est donc le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir, ou *le quotient qui résulte en divisant l'espace parcouru par le nombre de mesures du temps pendant lequel il a été parcouru.*

Il est clair en effet qu'on ne peut connoître la vîtesse que par la combinaison de ces deux éléments, l'espace et le temps, dont l'un tend à l'augmenter, et l'autre à la diminuer : car, par exemple, si on me dit que deux voyageurs, partant de Paris, sont allés, l'un à Brest, l'autre à Mézieres, j'aurois tort d'affirmer, d'après ce simple exposé, que le premier voyageur a marché plus vîte que le second, quoiqu'il ait parcouru un plus grand espace. Pour pouvoir comparer les deux marches, je dois avoir égard, non seulement aux espaces parcourus, mais encore aux temps dans lesquels ils ont été parcourus. Supposons la distance de Paris à Brest = 129 lieues, celle de Paris à Mézieres = 51 lieues ; supposons de plus que le premier voyageur ait marché 140 heures, le second 48 heures : je vois que le premier voyageur, loin d'avoir marché plus vîte, a marché plus lentement que le second ; car, en une heure, le premier a fait seulement les $\frac{129}{140}$ d'une lieue, et le second a fait $\frac{51}{48}$ lieues, c'est-à-dire une lieue entiere, plus les $\frac{3}{48}$ d'une lieue. Les deux vîtesses sont entre elles comme les nombres $\frac{129}{140}$ et $\frac{51}{48}$ quotients des espaces parcourus, divisés par les temps respectifs pendant lesquels ils ont été parcourus.

Il n'y a, dans ces divisions, rien qui répugne à leur nature arithmétique; car elles se réduisent à diviser des espaces qu'on peut regarder comme des nombres concrets, par les nombres (abstraits) des mesures des temps ; ce qui donne

pour quotients des espaces parcourus pendant l'unité de temps. Les espaces doivent être évalués en mesures de même espece, comme en toises, pieds, pouces, lignes, etc.; et semblablement il faut réduire les temps en mesures de même genre, comme en heures, minutes, secondes, tierces, etc.

Cette notion de la vitesse s'applique également au mouvement absolu et au mouvement relatif.

14. Le mouvement absolu et le mouvement relatif peuvent exister chacun séparément, ou se combiner ensemble de plusieurs manieres. Je m'explique par des exemples.

Supposons que le globe de la terre soit dans une immobilité absolue, ou puisse être censé faire partie de l'espace absolu et infini dans lequel il est placé : considérons de plus un bateau emporté par le courant d'une riviere, comme un espace relatif : on voit, 1°. qu'un oiseau arrêté dans le bateau est en mouvement dans l'espace absolu, puisqu'alors il peut être regardé comme ne faisant qu'un même tout avec le bateau, qui change continuellement de place par rapport aux objets fixes, situés sur le rivage, et qui est par conséquent en mouvement dans l'espace absolu; mais ce même oiseau est en repos dans l'espace relatif, qui est le bateau. 2°. Si, pendant que le bateau est emporté par le courant de la riviere, l'oiseau demeure suspendu en l'air par une cause quelconque, il paroîtra s'éloigner du bateau avec une vitesse égale et contraire à celle qui affecte réellement le bateau : il répondra toujours aux mêmes points fixes de l'espace absolu, ou sera en repos dans cet espace, tandis qu'il changera continuellement de position par rapport au bateau, ou paroîtra en mouvement dans l'espace relatif. 3°. Supposons que le bateau et l'oiseau, considérés toujours comme deux corps séparés, se meuvent l'un et l'autre, avec différentes vitesses, dans l'espace absolu, ou suivant la même direction, ou en sens contraires : la vitesse de l'oiseau par rapport au bateau sera la différence ou la somme des vitesses absolues des deux

corps. Ainsi, par exemple, si, dans une heure, le bateau parcourt 2500 toises, et l'oiseau 3700 toises, dans le même sens, la vitessse de l'oiseau par rapport au bateau sera de 1200 toises en une heure (différence des deux vitesses en une heure); c'est-à-dire que, pendant chaque intervalle d'une heure, l'oiseau s'éloignera continuellement du bateau de 1200 toises. Mais si, dans une heure, le bateau parcouroit 2500 toises, et l'oiseau 1200 toises en sens contraire, la vitesse de l'oiseau par rapport au bateau seroit de 3700 toises en une heure, somme des deux vitesses; en sorte que l'oiseau paroîtroit s'approcher ou s'éloigner du bateau de 3700 toises pendant chaque intervalle d'une heure : je dis *s'approcher* ou *s'éloigner*, pour comprendre les deux positions que l'oiseau peut avoir par rapport au bateau, l'une à droite, l'autre à gauche.

Il est difficile, et peut-être impossible de décider en général si un corps donné dans l'univers est en repos ou en mouvement, si son mouvement est absolu ou relatif : car nous jugeons communément qu'un corps est en repos lorsqu'il conserve la même situation par rapport à différents objets supposés immobiles, par exemple, par rapport aux étoiles fixes; et qu'au contraire un corps est en mouvement lorsqu'il change de situation par rapport à ces mêmes objets. Or il peut se faire que les objets que nous regardons comme immobiles soient réellement en mouvement : d'où l'on voit que le repos et le mouvement sont susceptibles en eux-mêmes de plusieurs variétés qui peuvent nous échapper. Les mouvements qui sont l'objet de la mécanique ordinaire s'exécutent sur la surface de la terre ; ainsi ils ne sont le plus souvent, quant au fond, que des mouvements relatifs, puisque, suivant la vraie astronomie, la terre tourne dans les espaces célestes autour du soleil en même temps qu'elle tourne sur son axe. Mais on peut les considérer comme absolus, en faisant abstraction du mouvement propre de la terre dans l'espace absolu; ensuite on pourra distinguer sur la surface de la terre des espaces particuliers ou re-

latifs, capables de recevoir des corps en repos ou en mouvement.

Comme le mouvement absolu et le mouvement relatif sont soumis aux mêmes lois, je les comprendrai l'un et l'autre sous leur nom générique *mouvement*, sauf à les désigner par leurs noms propres, si les circonstances l'exigent.

15. Il est évident que, si un corps est en repos, il ne peut pas lui-même se donner du mouvement; il a besoin d'être excité par un agent extérieur, qu'on appelle *puissance* ou *force*. Ainsi la puissance ou force, appliquée à un corps, lui imprime ou tend à lui imprimer du mouvement.

Je dis *imprime* ou *tend à imprimer :* car ces deux cas sont différents., et donnent lieu de distinguer deux sortes de forces ; les *forces motrices*, qui produisent un mouvement réel et actuel ; les *forces de pression*, qui tendent seulement à imprimer du mouvement, et qui n'en produisent pas, parceque leur effet est détruit par la résistance de quelque obstacle, ou par d'autres forces opposées. Les vitesses qui résultent des premieres s'appellent *vitesses réelles ;* les vitesses que les secondes tendent à produire s'appellent *vitesses virtuelles*. Par exemple, un corps qui tombe librement de 15 pieds de hauteur acquiert, en vertu des coups répétés de la pesanteur, une vitesse réelle, capable de lui faire parcourir uniformément 30 pieds en une seconde, comme nous l'expliquerons dans la suite : ainsi la somme des coups donnés par la pesanteur, pendant la chûte de 15 pieds, est une force motrice, qui produit une vitesse réelle, uniforme, de 30 pieds par seconde. Mais si un corps, animé par la pesanteur, est soutenu par une table qui l'empêche de descendre, alors chaque coup de la pesanteur, qui est détruit par la table, et qui est suivi d'un autre coup semblablement détruit, est une force de pression, qui tend à produire, mais qui ne produit pas une vitesse actuelle.

16. Toute force, quelle que soit sa nature, ne peut être mesurée que par son effet. Or que fait la force? Elle transporte ou tend à transporter une certaine quantité de matiere d'un endroit de l'espace dans un autre endroit pendant un certain temps. Il y a donc deux choses à considérer dans l'effet de la force, savoir: 1°. la masse transportée réellement ou virtuellement; 2°. la vîtesse réelle ou virtuelle, avec laquelle cette masse est transportée. Ainsi l'effet résultant est la vîtesse communiquée à tous les points de la masse, ou répétée autant de fois qu'il y a de points dans la masse, ou, ce qui est encore la même chose, le *produit de la masse par la vîtesse*. Ce produit constitue la *quantité de mouvement*, qui est réelle ou virtuelle, selon que la vîtesse est réelle ou virtuelle.

17. D'après ces principes, voici l'idée précise qu'il faut se faire des forces que la mécanique considere. *La force de pression est représentée par le produit d'une certaine masse, par la vîtesse qu'elle tend à lui communiquer.* Toutes les fois que des produits de cette nature seront égaux, ils indiqueront des pressions égales. *La force motrice est représentée par le produit de la masse, par la vîtesse qu'elle lui communique réellement.*

18. On appelle *systême de corps* l'assemblage de plusieurs corps liés ensemble par des fils, par des verges, ou de toute autre maniere, et assujettis par-là à ne former qu'un même tout, dont aucune partie ne peut éprouver d'action sans que les autres n'en éprouvent aussi. Et semblablement on appelle *systême de forces* l'assemblage de plusieurs forces, qui agissent à la fois sur un corps ou sur un systême de corps, soit en s'aidant mutuellement, soit en se combattant.

19. Si plusieurs forces appliquées à un corps ou à un systême de corps se détruisent, de maniere qu'il n'en résulte

aucun mouvement, elles sont en *équilibre* : maniere d'être qui differe du simple repos, en ce que le repos est un état purement oisif, qui existe en l'absence de toutes forces, au lieu que l'équilibre suppose l'exercice virtuel de plusieurs forces qui se combattent et qui s'anéantissent réciproquement. La partie de la mécanique qui traite de l'équilibre des forces s'appelle la *mécanique statique*, ou simplement la *statique* ; quelques auteurs l'appellent encore la *science des forces de pression* : elle considere sur-tout l'équilibre dans les machines, instruments destinés à varier les deux éléments d'une puissance proposée, le poids ou la vîtesse, et à procurer la combinaison la plus avantageuse relativement à un certain but, comme nous l'expliquerons ci-dessous en détail.

Si de l'action des forces résultent des mouvements, ces mouvements sont l'objet de la mécanique proprement dite, qu'on appelle quelquefois en général *dynamique* ; dénomination abrégée que nous emploirons, quoique le mot *dynamique* signifie spécialement la science des mouvements produits ou détruits par l'action et la réaction réciproques de plusieurs corps qui composent un même système.

Cet ouvrage sera divisé en deux parties. Dans la premiere, je donnerai les éléments de la statique, ou la théorie générale de l'équilibre ; et je ferai l'application de cette théorie aux machines. Dans la seconde, je traiterai du mouvement ; et, pour la plus grande clarté, je diviserai cette partie en deux livres : le premier aura pour objet les propriétés générales du mouvement, de quelque maniere qu'il ait pu être produit ; dans le second livre, j'exposerai les lois suivant lesquelles les corps se communiquent le mouvement, en agissant et réagissant les uns sur les autres d'une maniere quelconque ; ce qui est l'objet de la dynamique proprement dite.

PREMIERE PARTIE.

ÉLÉMENTS DE STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux de l'Equilibre.

20. Il y a deux choses à considérer dans toute force, la quantité d'action qu'elle exerce, et le sens suivant lequel elle exerce cette action. Pour comparer ensemble plusieurs forces d'une maniere exacte et complete, on doit avoir égard à ces deux circonstances. Or nous remplirons l'un et l'autre objet, en prenant sur les directions des forces proposées des lignes droites qui leur soient proportionnelles; car ces lignes exprimeront tout à la fois les quantités d'action des forces, et les sens suivant lesquels ces forces agissent. Par exemple, soient deux forces P et Q (Fig. 1), qui tirent un corps A, par le moyen de deux fils ou de deux verges, dans les sens AP, AQ; et supposons que la puissance P soit double de la puissance Q. Je prendrai sur AQ, direction de la puissance Q, la partie arbitraire AC, pour représenter cette puissance, et ensuite sur AP, direction de la puissance P, la partie AB, double de AC, pour représenter cette puissance. Par-là, les effets complets des deux puissances Q et P seront exprimés par les lignes AC, AB. Si ces mêmes puissances avoient entre elles tout autre rapport, je prendrois les lignes AC, AB dans ce rapport; c'est-à-dire que j'établirois la proportion, Q:P::AC:AB.

Souvent, pour abréger l'expression, on appelle les forces par les noms des lignes qui les représentent. Ainsi, si l'on veut désigner la puissance P par son effet complet, au lieu de dire *la puissance représentée par la partie* AB *de sa direction*, on dit simplement *la puissance* ou *la force* AB.

21. Les forces étant des quantités de même espece, ou toujours réductibles à la même espece, elles doivent être évaluées par le moyen d'une même mesure commune à laquelle on les rapportera. Or, comme nous rencontrons partout des corps pesants, et que nous avons une idée très claire des pressions qu'ils produisent, rien n'est plus simple et plus naturel que de prendre un certain poids pour l'unité des forces de pression. Prenons, par exemple, la livre pour cette unité: les deux forces Q et P étant supposées être dans le rapport de 1 à 2; si la force Q est équivalente à un poids de 12 livres, la force P sera équivalente à un poids de 24 livres.

Je n'ai pas besoin de faire observer qu'en comparant toutes sortes de forces de pression à des poids, la comparaison ne porte que sur les quantités, et qu'une force doit toujours être censée agir suivant sa propre direction.

Axiômes.

22. I. Un *point ne peut pas aller par plusieurs chemins à la fois.* Ainsi, lorsque plusieurs forces sont appliquées à un point, ou à un corps dont toute la masse peut être censée réunie en un même point, ou ce corps ne se mouvra point du tout, ou il se mouvra par un seul chemin, de la même maniere que s'il étoit poussé par une force unique, équivalente, quant à l'effet dans ce sens, à toutes les forces proposées.

Cette force, qui produit ainsi dans un certain sens le même effet que plusieurs autres forces, en est appelée la *résultante ;* et ces forces sont appelées *forces composantes*, par rapport à la résultante. Trouver la résultante, quan‹

a les forces composantes, est ce qu'on appelle la *composition des forces;* et trouver les forces composantes, quand on a la résultante, est ce qu'on appelle la *décomposition des forces.*

II. *Deux forces égales et directement opposées se détruisent ou se font équilibre;* car il n'y a pas de raison pour que l'une l'emporte sur l'autre. *Et réciproquement, quand deux forces se détruisent, elles sont nécessairement égales et directement opposées;* car il est visible qu'une force ne peut être détruite que par un obstacle placé sur sa direction.

Il suit de là, 1°. qu'il y a équilibre entre plusieurs forces appliquées à un même point, ou lorsque la résultante de toutes ces forces est égale à zéro dans tous les sens, ou lorsque l'une quelconque des forces est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, ou lorsque la résultante de deux quelconques des forces est égale et directement opposée à la résultante des forces qui restent, ou lorsque la résultante de trois quelconques des forces est égale et directement opposée à la résultante des forces qui restent, ou, etc. Toutes ces conditions, qui peuvent paroître différentes au premier coup-d'œil, aboutissent au même but, à l'égalité de deux forces directement opposées; ce qui produit nécessairement l'équilibre. Dans le premier cas, où toutes les forces ont une résultante égale à zéro dans tous les sens, cette force peut être censée détruite dans tous les sens par une force contraire qui est aussi zéro.

2°. Réciproquement, si plusieurs puissances appliquées à un même point se font équilibre, cet équilibre a lieu, ou parceque la résultante de toutes ces forces se réduit à zéro dans tous les sens, ou parceque l'une quelconque des forces est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, ou parceque la résultante de deux quelconques des forces est égale et directement opposée à la résultante des forces qui restent, ou, etc.

III. *Si une force agit sur un corps perpendiculairement à une ligne ou à un plan, elle ne pourra imprimer aucun mouvement au corps parallèlement à cette ligne ou à ce plan;* car il n'y a pas de raison pour que la force excite, plutôt dans un sens que dans un autre, de mouvement parallele à la ligne ou au plan proposé, et par conséquent ce mouvement parallele est nul dans tous les sens.

Demandes.

23. I. *Qu'il soit permis de regarder une force comme appliquée à tel point qu'on voudra de sa direction.* Cette demande ne peut pas être refusée, puisqu'en quelque endroit de sa direction qu'une force soit appliquée, elle exerce toujours la même action dans le même sens. Ainsi, quand deux puissances P et Q (Fig. 2) tirent un corps A, on peut supposer que ces deux puissances, au lieu d'être appliquées en P et Q, le sont au point A, leurs actions étant toujours dirigées dans les sens AP, AQ. On peut même supposer qu'elles sont appliquées en P' et Q', et qu'elles poussent le corps A, par le moyen de verges inflexibles P' A, Q' A. Il en est de même pour tous les autres points de leurs directions.

II. *Que les corps auxquels nous imaginerons que les forces sont appliquées, puissent être regardés comme non pesants.*

Lorsqu'il faudra avoir égard à la pesanteur d'un corps, on pourra encore le regarder comme non pesant, en supposant que sa pesanteur est une force extérieure qui le pousse de haut en bas, et qui se combine avec les autres forces auxquelles il peut être soumis.

Proposition I. Théorème.

24. Si *deux puissances* P *et* Q (Fig. 3) *tirent un corps* A *dans le même sens* AQ, *il en résultera sur ce corps la même*

action que s'il étoit tiré dans le même sens par une force unique égale à la somme des deux puissances P *et* Q.

Cela est évident, puisque les puissances P et Q peuvent être censées réunies toutes les deux en un même point (Dem. I), et qu'alors la puissance appliquée à ce point est $P + Q$.

COROLLAIRE I.

25. DONC, pour faire équilibre aux deux puissances P et Q, il faut leur opposer dans la direction A S une force $S = P + Q$.

COROLLAIRE II.

26. SI un nombre quelconque de forces tire un corps suivant la même direction, il faudra, pour leur faire équilibre, leur opposer dans le sens contraire une force égale à leur somme; car, en prenant d'abord deux de ces forces, elles se réduisent à une seule, égale à leur somme : combinant cette force avec une troisieme, on aura encore une force égale à leur somme; ainsi de suite. Donc, etc.

PROPOSITION II. THÉORÊME.

27. SI *deux puissances* P *et* Q (Fig. 4) *tirent en sens directement contraires* AP, AQ, *un corps* A, *il éprouvera, dans le sens de la plus forte* P, *la même action que s'il étoit tiré dans ce sens par une force unique, égale à la différence des deux forces* P *et* Q.

Car, en représentant par A B et par AC les deux puissances P et Q, et regardant la puissance P comme partagée en deux autres forces exprimées par AD et par DB, dont la premiere AD est égale et directement contraire à AC; il est évident (Ax. II) que les deux forces AD, AC se détruisent, et qu'il ne reste, pour mouvoir le corps A, que la seule force DB, égale à la différence des deux forces AB, AC, c'est-à-dire de P et Q.

COROLLAIRE I.

28. Donc, pour faire équilibre aux deux forces P et Q, il faut employer dans le sens AS une force $S = P - Q$.

Corollaire II.

29. Si l'on a un nombre quelconque de forces appliquées à un corps, dont les unes tirent dans un sens, les autres dans le sens directement opposé, et que la somme des premieres soit égale à la somme des secondes, il y aura équilibre dans le système. Mais si l'une des sommes surpasse l'autre, il faudra, pour l'équilibre, joindre à la plus petite somme une force égale à la différence des deux sommes proposées.

Proposition III. Lemme.

30. Si *une puissance* P (Fig. 5) *tire un corps* A *perpendiculairement à la droite* EG, *elle lui imprimera du mouvement seulement dans le sens* AP; *et* (Ax. III) *elle ne lui en donnera aucun, ni dans le sens* AE, *ni dans le sens* AG. *Mais si la puissance* P (Fig. 6) *tire obliquement par rapport à* EG, *elle éloignera tout à la fois le corps de la droite* EG, *et de la perpendiculaire* AZ.

Ce lemme est évident, et n'a besoin que d'être énoncé pour qu'on en voie la vérité.

Corollaire.

31. Représentons la puissance P (Fig. 6) par la partie AB de sa direction; et du point B menons les perpendiculaires BE, BF aux droites AE, AZ. Il est clair que la puissance P, en tirant le corps de A en B, l'éloignera de la droite AE d'une quantité exprimée par EB ou par AF; et de la droite AZ, d'une quantité exprimée par FB ou par AE.

Ainsi, par rapport au premier éloignement, le corps est dans le même cas que s'il étoit poussé par une force représentée par AF ; et, par rapport au second éloignement, il est dans le même cas que s'il étoit poussé par une force représentée par AE.

PROPOSITION IV. THÉORÊME.

32. SI *deux puissances* P *et* Q (Fig. 7 et 8) *tirent un corps* A, *suivant les directions* AP, AQ, *qui forment un angle* PAQ, *et sont représentées par les parties* AB, AC, *de leurs directions, ce corps éprouvera la même action que s'il étoit poussé par une force unique représentée par la diagonale* AD *du parallélogramme* ABDC.

Il peut arriver deux cas : ou les deux angles PAD, QAD, formés par les directions des forces avec la diagonale sont aigus; ou l'un, par exemple QAD, est obtus, l'autre étant nécessairement aigu. Je ne fais pas de division relativement à l'angle droit, parceque cet angle peut se rapporter indifféremment à l'angle aigu ou à l'angle obtus, étant leur limite commune.

I. CAS (Fig. 7). Il est clair que les deux forces P et Q n'agissant ni dans le même sens, ni dans des sens directement contraires, doivent en partie se détruire, en partie s'ajouter; et comme (Ax. II et 24) des forces ne peuvent se détruire, ou s'ajouter, qu'en tant qu'elles agissent en sens contraires, ou dans le même sens, les deux forces proposées P et Q peuvent être considérées comme les résultantes de quatre forces, dont deux agissent en sens contraires, tandis que les deux autres agissent dans le même sens. Or le corps ne peut aller que par un seul chemin (Ax. I); et le chemin qu'il prendra est évidemment celui des forces conspirantes, puisqu'elles le poussent l'une et l'autre dans le même sens, sans que rien s'oppose à ce mouvement: donc, 1°. les deux forces opposées doivent se détruire ; autrement le

corps auroit du mouvement dans le sens de la plus grande, et iroit par deux chemins; ce qui est impossible: 2°. les deux forces conspirantes doivent être perpendiculaires aux deux autres; car si cette perpendicularité n'avoit pas lieu, le corps prendroit (30, II Cas), soit dans un sens, soit dans le sens contraire, un mouvement parallelle à la ligne droite sur laquelle tombent les directions des forces opposées; et ces forces ne seroient pas totalement détruires: ce qui est contraire à ce qu'on vient d'établir. Telles sont les deux conditions auxquelles doit satisfaire l'expression de la résultante des deux forces AB, AC.

Menez par le point A, dans le plan des deux puissances AB, AC, et perpendiculairement à la diagonale AD, la droite EG, et achevez les deux rectangles AEBF, AGCH. En supposant qu'à la place de la force AB, on substitue les deux forces AF, AE; et à la place de la force AC, les deux forces AH, AG: les deux forces AF, AE exprimeront respectivement (31) les quantités dont la force AB tend à éloigner le corps des droites EG, AD; et semblablement les deux forces AH, AG exprimeront les quantités dont la force AC tend à éloigner le corps des mêmes droites EG, AD.

Cela posé: je dis que, par la substitution des quatre forces AF, AE, AH, AG, à la place des deux forces AB, AC, les deux conditions proposées seront remplies. Car d'abord les forces AF, AH sont conspirantes et perpendiculaires aux forces opposées AE, AG: de plus, les deux triangles rectangles ABF, DCH, qui ont les hypoténuses AB, DC égales, et tous les angles égaux chacun à chacun, sont parfaitement égaux: donc $BF = CH$; mais $BF = AE$, et $CH = AG$; donc $AE = AG$. Ainsi les deux forces directement opposées AE, AG sont égales, et par conséquent se détruisent. Il ne reste donc des quatre forces substituées que les deux forces AF, AH; et le corps est mu exactement de la même maniere que s'il éprouvoit simplement l'action de ces deux forces. Or, comme elles agissent dans le même sens, leur résultante est (24) $AF + AH =$

AF + FD = AD, à cause de FD = AH : donc les deux forces proposées AB, AC peuvent se réduire à une force unique exprimée par la diagonale AD : et comme le corps ne peut aller que par un seul chemin, que par conséquent la résultante des deux forces AB, AC, est *unique* ; il s'ensuit que cette résultante *pouvant* être exprimée par la diagonale AD, *est* réellement et uniquement exprimée par cette même diagonale.

II. Cas (Fig. 8). Menez par le point A, dans le plan des deux puissances, et perpendiculairement à la diagonale AD, la droite EG; et achevez les deux rectangles AEBF, AGCH. A la place de la force AB, vous pourrez prendre (I Cas) les deux forces AE, AF, et à la place de la force AC les deux forces AG, AH. Or les deux forces AE, AG sont directement opposées, et de plus sont égales : donc elles se détruisent. Il ne reste donc que les deux forces AF, AH ; et comme elles agissent en sens contraires, leur résultante est égale (27) à leur différence ; elle a par conséquent pour expression AF — AH, ou bien (à cause de AH = DF), AF — DF, ou la diagonale AD.

On voit, dans l'un et l'autre cas, que les deux côtés AB, AC, et la diagonale AD d'un parallélogramme étant dans un même plan, deux forces dont les directions concourent en un point, et leur résultante, sont aussi dans un même plan.

Corollaire I.

33. Il suit des deux cas que si, en général, deux forces sont représentées par les côtés contigus à un même angle, d'un parallélogramme quelconque, on peut leur substituer une force unique représentée par la diagonale correspondante du même parallélogramme ; et que réciproquement, à la place d'une force exprimée par la diagonale d'un parallélogramme, on peut prendre deux forces exprimées par les côtés du même parallélogramme, adjacents à cette diagonale.

Corollaire II.

34. Donc, pour trouver une puissance qui fasse équilibre aux deux puissances P et Q (Fig. 9), dont les directions concourent au point A, et qui sont exprimées par les parties AB et AC de ces directions, il faut achever le parallélogramme ABDC, et ayant prolongé la diagonale DA au-delà du point A, on appliquera, suivant cette direction AK, une puissance S, exprimée par une partie AK égale à AD : cette puissance (Ax. II) fera équilibre aux deux autres P et Q, puisqu'elle sera égale et directement opposée à leur résultante R.

Corollaire III.

35. Les deux puissances P, Q, et leur résultante R, étant exprimées par les côtés AB, AC, et la diagonale AD du parallélogramme ABDC, on a cette suite de rapports égaux, P : Q : R :: AB : AC ou BD : AD. Or si l'on forme un triangle MON, dont les côtés MO, ON, MN soient paralleles ou perpendiculaires chacun à chacun des côtés AB, BD, AD du triangle ABD, ces deux triangles seront semblables, par la géométrie. On aura donc, AB : BD : AD :: MO : ON : MN. Donc aussi P : Q : R :: MO : ON : MN. Et comme, pour l'équilibre, il faut opposer à la résultante R une force S qui lui soit égale, on aura aussi, P : Q : S :: MO : ON : MN.

Corollaire IV.

36. Si d'un point quelconque D (Fig. 10) de la direction de la résultante R des deux puissances P et Q, on abaisse les perpendiculaires DE, DF, sur les directions de ces puissances, et qu'on mene la droite EF, on aura cette suite de rapports égaux, P : Q : R :: DF : DE : EF. Car, ayant achevé le parallélogramme ABDC, on a, P : Q : R :: AB : AC ou BD : AD. Or les angles AED, AFD étant droits, le cercle décrit sur AD comme diametre, passe par les points E et F ; donc

l'angle BAD est égal à l'angle EFD, et l'angle CAD, ou son égal ADB, est égal à l'angle FED. Ainsi les deux triangles ABD, FDE sont semblables, et donnent AB : BD : AD :: DF : DE : EF ; donc aussi P : Q : R :: DF : DE : EF. Mettant dans cette suite de proportionnelles à la place de la résultante R la force S qui lui est égale et contraire, on aura, P : Q : S :: DF : DE : EF.

COROLLAIRE V.

37. LA même construction subsistant, si on ne demandoit que le rapport de P à Q, on auroit, P : Q :: DF : DE. D'où l'on voit que *les deux puissances* P *et* Q *sont en raison réciproque des perpendiculaires abaissées d'un même point de la direction de leur résultante sur leurs propres directions.*

Si on veut avoir, d'une maniere analogue, les rapports des puissances P et Q à la résultante R, ou à la force S; d'un point quelconque F de la direction de la puissance Q, on abaissera les perpendiculaires F*a*, F*b* sur les directions des puissances P et R; on joindra les points *a* et *b* par la droite *ab* : de même, d'un point quelconque E de la direction de la puissance P, on menera les perpendiculaires E*g*, E*f* sur les directions des puissances Q et R; on tirera *gf*. Par ces constructions, on formera deux triangles F*ab*, E*gf* semblables chacun au triangle ADB. Cette similitude se démontrera sans peine, si l'on décrit successivement sur AF et AE, comme diametres, des cercles, dont le premier passera nécessairement par les points *a* et *b*, et le second passera nécessairement par les points *g* et *f*; qu'ensuite on mene, par les points où ces cercles rencontrent AD, des paralleles à DB et à DC. D'où il suit qu'on aura, P : R ou S :: F*b* : F*a*, et Q : R ou S :: E*f* : E*g*.

Ainsi en général *deux quelconques des trois puissances* P, Q, S, *qui se font équilibre, sont entre elles en raison réciproque des perpendiculaires abaissées d'un même point de la direction de la troisieme sur leurs directions.*

COROLLAIRE VI.

38. CETTE même propriété peut être présentée sous une autre forme. Puisqu'on a les proportions P : Q :: DF : DE ; P : S :: F*b* : F*a* ; Q : S :: E*f* : E*g* ; on aura les équations P × DE = Q × DF ; P × F*a* = S × F*b* ; Q × E*g* = S × E*f*. D'où l'on voit que *trois puissances* P, Q, S *étant en équilibre, les produits de deux d'entre elles, multipliées chacune par la distance de sa direction à un même point de la direction de la troisieme, sont égaux entre eux.*

On appelle *moments des puissances* ces sortes de produits des puissances par les distances de leurs directions à un point, à une ligne, à un plan. Les points, lignes, plans, par rapport auxquels on considere les moments en général, s'appellent *centres de moments, axes de moments, plans de moments.*

COROLLAIRE VII.

39. PAR la géométrie, on sait que dans tout triangle les côtés sont entre eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés. Ainsi on aura, AB : BD : AD :: sin. ADB ou sin. QAR : sin. PAR : sin. ABD ou sin. PAQ (les deux angles ABD, PAQ étant suppléments l'un de l'autre, et ayant par conséquent le même sinus) : donc, puisqu'on a toujours P : Q : R ou S :: AB : BD : AD, on aura aussi, P : Q : R ou S :: sin. QAR : sin. PAR : sin. PAQ. D'où l'on voit que *chacune des trois puissances* P, Q, R *ou* S, *est représentée par le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

PROPOSITION V. PROBLÈME.

40. DÉTERMINER la *résultante d'un nombre quelconque de puissances* P, Q, R, S, T (Fig. 11) *concourantes au même point* A, *et représentées par les parties* AB, AC, AE, AG, AK *de leurs directions.*

En achevant le parallélogramme ABDC, la résultante des

deux forces AB, AC, est exprimée par la diagonale AD. Je prends donc à la place des deux forces AB, AC la force AD. Sur AD et AE, comme côtés contigus au même angle A, je fais le second parallélogramme ADFE; je tire sa diagonale AF; et la résultante des deux forces AD, AE est la force AF: cette même force est donc la résultante des trois forces AB, AC, AE. Sur AF et AG, comme côtés contigus au même angle A, je construis le troisieme parallélogramme AFHG; je tire sa diagonale AH, et la résultante des deux forces AF, AG, ou des quatre forces AB, AC, AE, AG, est la force AH. Continuant de même, sur AH et AK, comme côtés contigus à l'angle A, je fais le quatrieme parallélogramme AHLK; je tire sa diagonale AL, et la résultante des deux forces AH, AK, ou des cinq forces AB, AC, AE, AG, AK, est la force AL.

On voit qu'il est indifférent que les forces P, Q, R, S, T, soient dirigées ou non dans un même plan. Il suffit, pour trouver leur résultante comme nous venons de le faire, qu'elles concourent en un même point A.

Corollaire.

41. Donc, pour faire équilibre à toutes les forces AB, AC, AE, AG, AK, il faudra prolonger LA indéfiniment vers M, et appliquer dans cette direction une force M représentée par la partie AM égale à AL.

Proposition VI. Théorème.

42. Deux *puissances* P, Q, *et leur résultante* R (Fig. 12) *concourant au point* A; *si l'on mene une droite quelconque* FE *qui rencontre en* F, E, D, *leurs directions* AP, AQ, AR: *je dis que chaque force pourra être représentée par le produit de la partie de sa direction, comprise entre le point* A *et la sécante, multipliée par la partie de la sécante, comprise entre les directions des deux autres; c'est-à-dire qu'on aura*, P : Q : R :: AF × DE : AE × DF : AD × FE.

Du point D soient menées parallèlement aux directions des puissances P et Q les droites DC, DB, pour avoir le parallélogramme ABDC. On aura, P:Q:R :: AB ou DC:AC ou BD:AD. Or les triangles semblables EAF, ECD donnent EF : AF :: ED : DC $= \frac{AF \times ED}{EF}$; et les triangles semblables FAE, FBD donnent FE: AE :: FD : BD $= \frac{AE \times FD}{FE}$. Ainsi on aura P:Q:R :: $\frac{AF \times ED}{FE}$: $\frac{AE \times FD}{FE}$: AD. Multipliant la suite des conséquents par la même quantité FE, on aura P:Q:R :: AF × ED : AE × FD : AD × FE.

COROLLAIRE. I.

43. QU'ON mene parallèlement à la sécante FE une autre sécante KG. On aura AF : AE : AD :: KF : GE : HD. Multipliant cette suite par la suite identique DE : DF : FE :: DE : DF : FE, on aura AF × DE : AE × DF : AD × FE :: KF × DE : GE × DF : HD × FE. Donc P : Q : R :: KF × DE : GE × DF : HD × FE.

COROLLAIRE II.

44. LA même hypothese et la même construction subsistant toujours, il est clair qu'à mesure que le point A s'éloigne de FE, ou que l'angle PAQ devient plus aigu, les parties KF, GE, HD tendent à l'égalité; en sorte que quand le point A est infiniment éloigné, la raison derniere des lignes KF, GE, HD est une raison d'égalité; et les directions des trois puissances deviennent paralleles, comme dans la Figure 13. Ainsi la suite de proportionnelles P : Q : R :: KF × DE : GE × DF : HD × FE, devient (en divisant la suite des conséquents par les lignes égales KF, GE, HD), P : Q : R :: DE : DF : FE.

COROLLAIRE III.

45. IL suit de là, 1°. que la résultante de deux puissances paralleles P et Q, qui agissent dans le même sens, leur est

parallele, comme on voit, et de plus est égale à leur somme, puisque FE=FD+DE.

2°. Que la direction de cette résultante passe par un point D, dont la propriété est de rendre les deux puissances P et Q réciproquement proportionnelles aux distances, perpendiculaires ou obliques, du point D à leurs directions, puisqu'on a la proportion, P:Q :: DE:DF.

COROLLAIRE IV.

46. DONC, si l'on suppose que deux puissances paralleles P et Q (Fig. 14) sont appliquées aux extrémités d'une verge inflexible FE sans pesanteur, et qu'on veuille déterminer le point par lequel la verge doit être suspendue pour qu'il y ait équilibre, et l'effort que supporte le point de suspension; on n'aura qu'à diviser la droite FE au point D, de maniere que l'on ait, P : Q :: ED : FD, ou bien P+Q : P : Q : : FE : ED : FD, et qu'à appliquer ensuite dans la direction DS, parallele aux deux puissances P et Q, un appui ou une résistance S=P+Q.

COROLLAIRE V.

47. LES trois forces P, Q, S de l'article précédent étant en équilibre, chacune d'elles indifféremment peut être regardée comme faisant équilibre aux deux autres, ou comme étant égale et directement contraire à la résultante des deux autres. Considérons, par exemple, la puissance Q sous ce point de vue: il est clair que cette puissance est parallele aux deux forces composantes P et S; qu'elle est placée au-delà du point D, du côté de la plus grande force S; qu'elle agit dans le même sens que la plus foible P des deux forces composantes; et qu'elle est égale à leur différence, puisqu'on a FD=FE—DE. On trouvera la position du point E, en considérant qu'on a la proportion, S : P :: FE : DE, qui donne celle-ci, S—P : P : : FE—DE ou FD : DE, dans laquelle les trois premiers termes sont connus.

Remarque I.

48. L'équilibre absolu des trois forces paralleles P, Q, S, demande nécessairement qu'on ait tout à la fois l'équation $S = P + Q$, et la proportion $P : Q :: DE : DF$, ou l'équation $P \times DF = Q \times DE$. En vertu de la premiere équation, la verge (Ax. II) ne peut se mouvoir parallèlement à elle-même, ni dans le sens DS, qui est celui de la force S, ni dans le sens DR, qui est celui de la résultante R ou (P+Q), puisque les deux forces S et R sont égales et directement opposées: mais cela n'établit que l'immobilité du point D de la verge; et il pourroit se faire que la verge eût un mouvement de rotation autour du point D. Or ce mouvement est impossible, à cause de la seconde équation $P \times DF = Q \times DE$. En effet, supposons pour un moment que la verge EF pût tourner autour du point D, et qu'en un instant elle décrivît par ses extrémités les petits arcs semblables Ee, Ff. Puisqu'on a $P : Q :: DE : DF$, et que les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons, on aura $P : Q :: Ee : Ff$. Ainsi les deux forces P et Q sont réciproquement proportionnelles aux espaces qu'elles tendent à faire parcourir dans le même temps, en vertu des deux mouvements de rotation ; et par conséquent ces deux mouvements, qui se feroient en sens contraires, se détruisent mutuellement. Car supposons, par exemple, que la partie DF de la verge soit de deux pieds, la partie DE de quatre pieds, la force P un poids de six livres, et par conséquent la force Q un poids de trois livres; les effets que produisent les rotations des points E et F sont, l'un par rapport à l'autre, comme s'il s'agissoit, d'une part, de faire parcourir quatre pieds à un poids de trois livres, et, d'autre part, de faire parcourir deux pieds à un poids de six livres. Or il est visible que ces deux effets sont égaux; car nous pouvons partager le poids de six livres, qui parcourt deux pieds, en deux poids chacun de trois livres, qui parcourent chacun deux

pieds; ce qui revient à un seul poids de trois livres qui parcourt quatre pieds. Donc les deux mouvements de rotation doivent s'anéantir réciproquement, ou, ce qui revient au même, ils ne peuvent avoir lieu ni l'un ni l'autre.

Ainsi, en vertu des deux équations proposées, la verge ne peut avoir ni mouvement de translation parallèlement à elle-même, ni mouvement de rotation autour du point D. Elle ne peut pas avoir non plus de mouvement de rotation autour de quelque autre point, puisque, étant empêchée tout à la fois de se mouvoir parallèlement à elle-même, et de tourner autour du point D, elle est nécessairement dans une immobilité absolue.

Je n'ai pas besoin de faire observer que la verge ne peut pas se mouvoir dans le sens de sa longueur, puisqu'il n'y a aucune force qui agisse dans ce sens.

Remarque II.

49. Si, à la place de l'une des forces, par exemple, si, à la place de la force Q, on substitue une force parallele q, appliquée en M, et telle que l'on ait $q : Q :: DE : DM$, ou $q \times DM = Q \times DE$: les deux forces q et Q tendront à produire le même mouvement de rotation autour du point D. Ainsi, par rapport à ce mouvement, ces deux forces sont également propres à contrebalancer la puissance P. Il n'y aura donc point de mouvement de rotation autour du point D, si l'on substitue q à Q, et qu'on ait l'équation $P \times DF = q \times DM$. Mais alors la verge aura un mouvement de translation parallèlement à elle-même. Car, pour empêcher ce dernier mouvement, il faudroit qu'on appliquât dans la direction DS une force $= P + q = P + \frac{Q \times DE}{DM}$; force qui differe de S, dont la valeur est $P + Q$.

On voit par-là qu'on empêchera toujours le mouvement de rotation autour d'un point donné, en substituant les unes à la place des autres, des forces qui soient réciproquement

proportionnelles aux distances de leurs directions à ce point; mais qu'alors la pression de ce même point augmente ou diminue, et que par conséquent, si l'on veut empêcher aussi le mouvement de translation, la résistance de l'appui doit être prise, dans chaque cas, suivant la loi que nous venons d'établir.

Dans le calcul des machines, on fait souvent des substitutions de forces pour empêcher les mouvements de rotation; et on ne s'embarrasse pas des pressions que souffrent les appuis qui sont immobiles, et qui ont ordinairement plus de résistance qu'il ne leur en faut. Mais on se tromperoit, si l'on croyoit que les appuis seront, dans tous les cas, également chargés.

Proposition VII. Problême.

50. Déterminer *la résultante de plusieurs forces paralleles qui agissent dans un même sens.*

Soit un nombre quelconque de corps A, B, C, D (Fig. 15), situés ou non dans un même plan, et soumis à l'action des forces paralleles P, Q, R, S, qui agissent dans le même sens. Imaginons que tous ces corps soient liés entre eux par des verges inflexibles AB, BC, CD, DA, sans pesanteur, et ne forment qu'un même système. Cela posé: les deux forces P et Q ont pour résultante (45) une force X qui leur est parallele, dont la quantité est $P+Q$, et dont la direction passe par le point E, qui est tel, qu'on a, $P:Q::BE:AE$. Substituons à la place des deux forces P et Q la force X, et menons la droite EC: les deux forces X et R auront pour résultante la force $Y=X+R=P+Q+R$, et le point G où elle coupe EC sera tel, qu'on aura, X ou $P+Q:R::CG:EG$. Prenons à la place des deux forces X et R, ou des trois forces P, Q, R, la force Y, et ayant mené la droite GD, nous verrons que les deux forces Y et S ont pour résultante la force $Z=Y+S=P+Q+R+S$, et que le point F par où passe la direction de la force Z est tel, qu'on aura, Y

ou P+Q+R:S :: DF:GF. La force Z est donc la résultante de toutes les forces proposées P, Q, R, S; et on détermineroit de même successivement la force résultante, si le nombre des forces composantes étoit plus grand.

COROLLAIRE I.

51. DONC (Ax. II), pour faire équilibre à toutes les forces P, Q, R, S, il faut appliquer dans la direction ZF une force V=P+Q+R+S.

COROLLAIRE II.

52. SI toutes les forces paralleles P, Q, R, S, n'agissoient pas dans le même sens, on commenceroit par déterminer séparément chaque résultante des forces qui agissent dans le même sens. Par-là, on auroit deux résultantes dirigées en sens contraires, et on trouveroit la force qui peut leur faire équilibre, par le moyen de l'article 47.

REMARQUE I.

53. AU lieu de supposer, comme nous avons fait, que les forces P, Q, R, S, sont appliquées aux points A, B, C, D, nous pouvons (23 Dem. I) les supposer appliquées aux points quelconques *a*, *b*, *c*, *d* de leurs directions; et alors nous trouverons que les nouvelles résultantes X, Y, Z, qui sont toujours paralleles aux forces composantes, passent par les points *e*, *f*, *g*, intersections des droites *ab*, *ec*, *gd*, avec les droites EX, GY, FZ premièrement déterminées. Car (45) dans le second cas, le point *e* par où passe la résultante des deux puissances P et Q, est tel que P:Q :: *be*:*ae*. Or, à cause des paralleles AP, BQ, EX, on a *be*:*ae* :: BE:AE. Donc le point *e* est l'intersection des droites *ab*, EX. Même raisonnement pour les autres résultantes: de plus, les quantités de force des résultantes sont toujours les mêmes. Ainsi la direction et la quantité de la résultante finale Z sont toujours les mêmes, en quelques points de

leurs directions qu'on suppose que les forces composantes soient appliquées.

Cela est également vrai, avec les changements convenables, pour le cas où les forces n'agiroient pas dans le même sens.

Remarque II.

54. Si les forces appliquées aux corps A, B, C, D, en demeurant toujours les mêmes en quantités, prenoient d'autres directions quelconques Ap, Bq, Cr, Ds, toujours paralleles entre elles, et qu'on nommât x, y, z, les résultantes analogues à X, Y, Z, les nouvelles résultantes seroient égales chacune a chacune des premieres; et, de plus, la résultante x passeroit par le point E; la résultante y, par le point G; la résultante z, par le point F. Il y a donc toujours dans la direction de la résultante finale d'un nombre quelconque de forces paralleles, agissantes ou non dans un même sens, un point F, qui est tel, que si les forces, sans changer de quantités, et sans cesser d'être paralleles, et d'être appliquées aux mêmes endroits d'un système de corps, changent d'ailleurs *semblablement* de directions de toutes les manieres possibles, toutes les résultantes finales (qui ont la même valeur) se couperont en ce point.

Ce point remarquable peut, à cause de sa propriété, s'appeler *centre des forces paralleles.*

Proposition VIII. Théorême.

55. Deux *puissances* P *et* Q, *et leur résultante* R (Fig. 16 et 17), *concourant au point* A; *si d'un point quelconque* E, *pris dans le plan de ces puissances, on abaisse les perpendiculaires* EF, EG, EH, *sur leurs directions* AP, AQ, AR, *on aura*

$$Q \times EG + P \times EF = R \times EH \text{ (Fig. 16)},$$
$$Q \times EG - P \times EF = R \times EH \text{ (Fig. 17)}.$$

En sorte que la somme ou la différence des moments des

forces P *et* Q, *par rapport au point* E, *est égale au moment de la résultante* R, *par rapport au même point.*

Soit construit le parallélogramme ABCD sur les directions des trois puissances ; on aura P : Q : R :: AB : BD : AD. Menez la droite AE ; et sur cette ligne, comme diametre, décrivez le cercle AMEG, qui passera nécessairement par les points F, G, H, puisque les angles EFA, EGA, EHA sont droits. Tirez les cordes FH, HG ; et du point B menez, parallèlement à AE, la droite BK, qui rencontre en K la droite AR (Fig. 16), ou son prolongement AS (Fig. 17). Les deux triangles ABK, EHF sont semblables, par la géométrie ; car l'angle ABK est égal à son alterne EAF, et celui-ci est égal à l'angle EHF ; de plus, les deux angles BAK, HEF sont égaux. Ces triangles semblables donnent la proportion AB : EH : : AK : EF, et par conséquent $AB \times EF = EH \times AK$.

Les deux triangles DBK, EHG sont aussi semblables, par les mêmes principes de géométrie, et donnent par conséquent, DB : EH : : DK . EG, ou $DB \times EG = EH \times DK$.

Ajoutant ensemble les deux égalités (Fig. 16), ou retranchant l'une de l'autre (Fig. 17), on aura,

$$DB \times EG + AB \times EF = AD \times EH \text{ (Fig. 16)},$$
$$DB \times EG - AB \times EF = AD \times EH \text{ (Fig. 17)}.$$

Mettant à la place des lignes AB, DB ou AC, AD, les forces P, Q, R, que ces lignes représentent, et réunissant les deux cas à l'aide du double signe ± placé au-devant du second terme, on aura,

$$\text{(A)} \quad Q \times EG \pm P \times EF = R \times EH.$$

REMARQUE I.

56. Si à la résultante R, on oppose directement une force S qui lui soit égale, il y aura équilibre entre les forces P, Q, S ; et l'équation (A) (en mettant S pour R), deviendra $Q \times EG \pm P \times EF = S \times EH$.

Comme de plusieurs forces en équilibre, on est maitre de

prendre celle qu'on voudra pour une force égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres (Ax. II), si nous considérons, 1°. la force Q sous ce point de vue, et que nous mettions l'équation précédente sous cette forme, $S \times EH \mp P \times EF = Q \times EG$, ou bien sous celle-ci (en nommant Q' la résultante des deux forces P et S, laquelle est égale et directement opposée à Q), $S \times EH \mp P \times EF = Q' \times EG$: nous verrons que la différence ou la somme des moments des forces composantes S et P est égale au moment de leur résultante Q'. Le premier cas a lieu (Fig. 16), parcequ'alors le point E tombe dans l'angle PAS formé par les directions des deux forces composantes P et S; et le second a lieu (Fig. 17), parcequ'alors le point E tombe hors de l'angle PAS.

2°. Considérons la force P comme égale et directement opposée à la résultante des deux forces Q et S, et nommons P' cette résultante : nous trouverons, $\pm(S \times EH - Q \times EG) = P' \times EF$. Ainsi, pour les deux Figures, la différence des moments des forces composantes est égale au moment de la résultante, parceque, dans l'une et l'autre Figure, le centre de moment tombe dans l'angle Q'AR opposé par le sommet à l'angle QAS, que forment les directions des forces composantes. Mais (Fig. 16) ce centre tombe en-deçà de l'angle P'AS, ou de son opposé au sommet PAR, et la différence des moments des forces S et Q est $S \times EH - Q \times EG$; au lieu que (Fig. 17) le point E tombe dans l'angle PAR opposé par le sommet à l'angle P'AS, ce qui donne $Q \times EG - S \times EH$ pour la différence des moments des deux forces Q et S.

Remarque II.

57. De là suit en général une regle facile pour reconnoître si le moment de la force qu'on regarde comme la résultante des deux autres, ou comme égale et contraire à cette résultante, est égal à la somme, ou à la différence des moments des forces composantes; et, dans ce dernier cas,

comment il faut prendre la différence. Regardez le centre de moment comme un point fixe et comme le centre commun à deux cercles qui auroient pour rayons les perpendiculaires abaissées de ce point sur les directions ou sur les prolongements des directions des forces composantes. Cela posé, 1°. si les deux forces composantes, par la maniere dont elles sont dirigées, tendent à faire tourner les deux cercles dans le même sens : le moment de la résultante ou de la force égale à cette résultante, est égal à la somme des moments des forces composantes. 2°. Si les deux forces composantes tendent à faire tourner les deux cercles en sens contraires, le moment de la résultante ou de la force égale à cette résultante, est égal à la différence des moments des forces composantes; et, pour avoir cette différence, il faut observer que des deux moments des forces composantes, le plus grand est celui de la force placée d'un même côté, par rapport au centre de moment et par rapport à l'angle que forme la direction de l'autre force composante avec celle de la résultante, ou à l'angle opposé par le sommet à celui que nous venons d'indiquer.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que, dans le premier cas, la résultante tend à faire tourner le corps dans le sens des forces composantes, et que, dans le second, elle tend à le faire tourner dans le sens de la force composante, dont le moment est le plus grand.

COROLLAIRE I.

58. SUPPOSONS que le point de concours A s'éloigne de plus en plus jusqu'à l'infini, en sorte qu'à la fin les directions des trois puissances P, Q, S, deviennent paralleles (Fig. 18 et 19.). Il est clair que nos équations subsisteront toujours, et que les points F, G, H, seront maintenant placés sur une même ligne droite, perpendiculaire aux directions des trois forces. De plus on aura (45), $S = R = P + Q$. Donc (Fig. 18 et 19),

$$\text{(B)} \quad Q \times GE \pm P \times FE = (P + Q) \times HE.$$

COROLLAIRE II.

59. LES puissances P, Q, S, étant toujours paralleles, si, par le point E, on mene une droite quelconque EX, et des points F, G, H, les paralleles FV, GX, HT, vers cette ligne, on aura (Fig. 18 et 19),

$$Q \times GX \pm P \times FV = (P+Q) \times HT.$$

Car, à cause des triangles semblables EFV, EGX, les lignes EF, EG, EH, étant proportionnelles aux lignes FV, GX, HT, si l'on suppose $EF = n.\,FV$, on aura $EG = n.\,GX$, $HE = n.\,HT$. Substituant ces valeurs de EF, de EG, de HE, dans l'équation (B), et divisant tout par n, on aura $Q \times GX \pm P \times FV = (P+Q) \times HT$.

D'où l'on voit que *la somme ou la différence des moments des forces paralleles* P *et* Q, *par rapport à l'axe* EX, *est égale au moment de leur résultante, par rapport au même axe.*

Il est indifférent que les distances FV, GX, HT, soient perpendiculaires ou obliques à l'axe EX.

COROLLAIRE III.

60. De l'équation $Q \times GX \pm P \times FV = (P+Q) \times HT$, on tire $HT = \frac{Q \times GX \pm P \times FV}{P+Q}$.

Ainsi, connoissant la position de l'axe EX et les distances perpendiculaires ou obliques GX, FV, on connoîtra la distance perpendiculaire ou oblique du centre H des forces P et Q à l'axe EX. On pourra donc fixer la position de ce centre, en prenant sur l'une GX des distances une partie Xa égale à la valeur qu'on a trouvée pour HT, et menant la droite aH parallele à XE.

COROLLAIRE IV.

61. LORSQUE le point E tombe sur le centre H (Fig. 20), la distance HT s'évanouit; et on a $Q \times GX - P \times FV = 0$,

ou $Q \times GX = P \times FV$. D'où l'on voit que *les moments des deux forces* P *et* Q, *par rapport à tout axe qui passe par leur centre, sont égaux*.

COROLLAIRE V.

62. QU'ON mene (Fig. 21 et 22) la droite quelconque fg, qui rencontre obliquement en f, g, h, les directions de nos trois puissances paralleles P, Q, S; et des points f, g, h, soient tirées les paralleles fu, gx, ht vers l'axe Ex, qui coupe au point quelconque E la droite fg, et qui a une position quelconque. De plus, soit menée par le point E la droite EG perpendiculaire aux directions des trois puissances. On aura ces équations :

$$Q \times gE \pm P \times fE = (P+Q) \times hE,$$
$$Q \times gx \pm P \times fu = (P+Q) \times ht,$$
$$Q \times Gg \pm P \times Ff = (P+Q) \times Hh,$$

qui ne sont autre chose que l'équation (B), en substituant aux trois lignes EF, EG, EH, trois autres lignes qui leur sont proportionnelles, c'est-à-dire, ou les trois lignes Ef, Eg, Eh, ou les trois lignes fu, gx, ht, ou les trois lignes Ff, Gg, Hh.

En divisant chacune de ces équations par P+Q, on aura les valeurs des lignes hE, ht, Hh.

Il est clair que, lorsque le point E tombe sur le point h (Fig. 22), les trois lignes Eh, ht, Hh, s'évanouissent, et qu'alors on a $Q \times gE = P \times fE$; $Q \times gx = P \times fu$; $Q \times Gg = P \times Ff$.

COROLLAIRE VI.

63. SI nous supposons que les forces composantes agissent en sens contraires; que, par exemple, nous regardions les deux forces P et S comme les composantes, et par conséquent la force Q comme égale et directement contraire à

leur résultante : les équations (Fig. 18, 19, 21, 22),

$$Q \times GE \pm P \times EF = (P + Q) \times HE,$$
$$Q \times GX \pm P \times FV = (P + Q) \times HT,$$
$$Q \times gE \pm P \times fE = (P + Q) \times hE,$$
$$Q \times gx \pm P \times Fu = (P + Q) \times ht,$$
$$Q \times Gg \pm P \times Ff = (P + Q) \times Hh,$$

deviendront (en observant (47) que la résultante $= Q = S - P$, et chassant Q),

$$S \times HE \mp P \times FE = (S - P) \times GE,$$
$$S \times HT \mp P \times FV = (S - P) \times GX,$$
$$S \times hE \mp P \times fE = (S - P) \times gE,$$
$$S \times ht \mp P \times fu = (S - P) \times gx,$$
$$S \times Hh \mp P \times Ff = (S - P) \times Gg.$$

On trouveroit des équations analogues, en regardant P comme égale à la résultante des forces Q et S.

Ces équations font voir encore que *la différence ou la somme des moments des forces composantes est égale au moment de la résultante.*

On aura les lignes GE, GX, gE, gx, Gg, en divisant chacun des deux membres des mêmes équations, par $S - P$.

Proposition IX. Théorème.

64. Si *l'on a un nombre quelconque de forces paralleles, agissantes dans le même sens, et situées d'ailleurs comme on voudra, et que l'on considere leurs moments par rapport à un même plan :*

1°. *Lorsque toutes les forces sont placées d'un même côté de ce plan, la somme de leurs moments particuliers est égale au moment de leur résultante.*

2°. *Lorsque les forces sont placées en partie d'un côté, en partie de l'autre, par rapport au plan des moments, la différence entre la somme des moments des forces placées d'un côté, et la somme des moments des forces placées de l'autre côté, est égale au moment de leur résultante.*

Soient (Fig. 23 et 24) un systême de corps A, B, C, D, disposés à volonté, liés entre eux par des verges AB, BC, CD, AD, sans pesanteur, et soumis à l'action des forces paralleles P, Q, R, S, qui agissent dans le même sens. Supposons qu'après avoir déterminé (50) le centre F de toutes les forces, on mene vers un même plan YZ, de position quelconque, les paralleles A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, F*f*.

Cela posé, je dis, 1°. que pour la Figure 23, où toutes les forces sont placées d'un même côté par rapport au plan YZ, on aura $P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd = (P + Q + R + S) \times Ff$. Car supposons que le point E soit le centre des deux forces P et Q; menons la droite E*e*, parallele aux droites A*a*, B*b*, etc.; et observons que les trois points A, B, E, étant placés sur une même ligne droite, les trois points *a*, *b*, *e*, situés dans le plan YZ, sont aussi placés sur une même ligne droite : on aura (59, I Cas), $P \times Aa + Q \times Bb = (P + Q) \times Ee$. Joignons les points E et C, par la droite EC : soit G le centre des trois forces P, Q, R; et soit menée la droite G*g* parallele à A*a*, B*b*, etc. La force (P+Q) étant regardée comme appliquée en E, on aura, toujours par le même article 59, $(P + Q) \times Ee + R \times Cc = P + Q + R) \times Gg$, ou bien (en mettant pour $(P+Q) \times Ee$ sa valeur), $P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc = (P + Q + R) \times Gg$.

Continuant à raisonner de même, on aura $(P + Q + R) \times Gg + S \times Dd = (P + Q + R + S) \times Ff$, ou bien $P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd = (P + Q + R + S) \times Ff$.

2°. Pour la Figure 24, où les deux forces P et Q agissent à gauche, et les deux forces R et S à droite du plan YZ, on aura (le centre F tombant du côté de R et de S), $R \times Cc + S \times Dd - P \times Aa - Q \times Bb = (P + Q + R + S) \times Ff$. Car, du centre H des forces R et S, et du centre E des forces P et Q, menez au plan YZ les droites H*h*, E*e*, paralleles aux droites A*a*, B*b*, etc. Par le premier cas, on aura $(R + S) \times Hh = R \times Cc + S \times Dd$, et $(P + Q) \times Ee = P \times Aa + Q \times Bb$. Or la résultante des deux forces (R + S)

et $(P+Q)$, appliquées en H et E, passant par le point F, et par conséquent les trois points H, E, F, étant placés sur une même ligne droite, les trois points h, e, f, sont aussi placés sur une même ligne droite. Ainsi on aura (59, II Cas), $(R+S) \times Hh - (P+Q) \times Ee = (P+Q+R+S) \times Ff$. Substituant, dans le premier membre, à la place de $(R+S) \times Hh$, et de $(P+Q) \times Ee$, leurs valeurs, on aura $R \times Cc + S \times Dd - P \times Aa - Q \times Bb = (P+Q+R+S) \times Ff$.

Corollaire I.

65. En comprenant les deux cas (Fig. 23 et 24), dans la même équation générale, $R \times Cc + S \times Dd \pm P \times Aa \pm Q \times Bb = (P+Q+R+S) \times Ff$, et dégageant Ff, on aura...

$$Ff = \frac{R \times Cc + S \times Dd \pm P \times Aa \pm Q \times Bb}{P+Q+R+S}.$$

D'où l'on voit qu'*on aura la distance perpendiculaire ou oblique du centre d'un nombre quelconque de forces parallèles, agissantes dans le même sens, à un plan de position quelconque, en divisant la somme des moments de toutes les forces, ou la différence entre la somme des moments des forces placées d'un côté du plan des moments, et la somme des moments des forces placées de l'autre côté, par la somme de toutes les forces.*

Corollaire II.

66. Lorsque le plan YZ (Fig. 25) passe par le centre F de toutes les forces, la distance Ff s'évanouit; et alors on a $R \times Cc + S \times Dd - P \times Aa - Q \times Bb = 0$, ou $R \times Cc + S \times Dd = P \times Aa + Q \times Bb$.

D'où il suit que *la somme des moments des forces qui sont d'un même côté, par rapport à un plan qui passe par le centre de toutes les forces, est égale à la somme des moments des forces placées de l'autre côté.*

COROLLAIRE III.

67. REPRENONS les Figures 23 et 24; et supposons que les forces P, Q, R, S, toujours paralleles, n'agissent pas dans le même sens; que, par exemple, les forces P, Q agissent de haut en bas, et les forces R, S de bas en haut. Soient Ee, H*h*, les distances (paralleles aux droites A*a*, B*b*, etc.) des centres E, H, des deux classes de forces, au plan YZ. Je nomme Z la distance semblable du centre général de toutes les forces P, Q, R, S, au même plan, et je suppose que ce centre soit placé à droite du plan dont il s'agit. On aura (64, I Cas),

$$R \times Cc + S \times Dd = (R + S) \times Hh,$$
$$P \times Aa + Q \times Bb = (P + Q) \times Ee.$$

D'un autre côté, on a (63), $(R+S) \times Hh - (P+Q) \times Ee = (R+S-P-Q) \times Z$ (Fig. 23), et $(R+S) \times Hh + (P+Q) \times Ee = (R+S-P-Q) \times Z$ (Fig. 24). Ainsi on aura (en réunissant les deux cas, et mettant pour $(R+S) \times Hh$, $(P+Q) \times Ee$, leurs valeurs), $R \times Cc + S \times Dd \mp P \times Aa \mp Q \times Bb = (R+S-P-Q) \times Z$; c'est-à-dire que *la différence ou la somme des moments des forces composantes est égale au moment de la résultante.*

On aura la valeur de Z, en divisant les deux membres par $R+S-P-Q$.

Si on avoit $Z=0$, on auroit $R \times Cc + S \times Dd = P \times Aa + Q \times Bb$.

COROLLAIRE IV.

68. LORSQUE toutes les forces P, Q, R, S, sont situées dans un même plan, et que de plus les distances paralleles A*a*, B*b*, etc., sont menées dans ce plan, tous les points *a*, *b*, *c*, etc., sont placés sur une même ligne ou axe de moments; et alors on peut concevoir que le plan YZ, devenant infiniment étroit, se réduit à cet axe. Ainsi tout ce qu'on a

dit dans les quatre derniers articles s'appliquera à ce cas, en substituant simplement dans le discours le mot *axe* YZ au mot *plan* YZ.

Proposition X. Problême.

69. Déterminer, *par le moyen des moments, la position de la résultante de plusieurs forces paralleles, agissantes dans le même sens, situées ou non dans un même plan, ainsi que la place du centre des forces.*

1°. Supposons que les forces proposées P, Q, R, S (Fig. 26), soient dirigées dans un même plan. Qu'on mene à volonté dans ce plan les deux axes OE, OI, l'un parallele, l'autre perpendiculaire aux directions des forces: on pourroit donner toute autre position aux deux axes OE, OI, et les faire obliques entre eux; mais nous choisissons la position précédente pour plus de simplicité, et pour fixer les idées. Des points A, B, C, D, où les forces sont censées appliquées, soient menées vers l'axe OE, et parallèlement à l'axe OI, les droites Aa, Bb, Cc, Dd; de même soient menées vers l'axe OI, et parallèlement à OE, les droites Aa', Bb', Cc', Dd'. Concevons que le point F soit le centre inconnu des forces, et qu'on mene parallèlement à nos deux axes les droites Ff, Ff' : on aura, d'après tout ce qui vient d'être démontré,

$$Ff = \frac{P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd}{P + Q + R + S}.$$

Connoissant toutes les parties du second membre, on connoîtra la distance de la direction de la résultante à l'axe OE, et par conséquent la position de cette résultante.

On aura de même, relativement à l'axe OI,

$$Ff' = \frac{P \times Aa' + Q \times Bb' + R \times Cc' + S \times Dd'}{P + Q + R + S}.$$

On connoîtra donc la distance du centre des forces à cet axe. Ainsi, en prenant sur OI la partie Of' = Ff, et sur

f'F parallele à OE la partie f'F égale à la valeur qu'on vient de trouver, le point F sera le centre des forces.

On voit (68, II Cas) que si l'un des axes OE, OI ou tous les deux passoient entre les corps, il y auroit dans les expressions de Ff et de Ff' des moments négatifs. On voit de même que, si les axes passent par quelques uns des points, A, B, C, D, où les forces sont censées appliquées, les moments correspondants deviennent zéro; par exemple, si l'axe OE passoit par le point A, la distance Aa s'évanouiroit, et par conséquent le moment P × Aa deviendroit nul.

2°. Lorsque les forces P, Q, R, S (Fig. 27), toujours censées appliquées aux points A, B, C, D, ne sont pas dans un même plan, on imaginera trois plans OEXV, OEYI, OVZI, perpendiculaires entre eux, et dont les deux premiers sont paralleles aux directions des forces, tandis que le troisieme leur est perpendiculaire. Des points A, B, C, D, et du centre F des forces, soient menées perpendiculairement aux plans OEXV, OVZI, OEYI, les droites Aa, Aa', Aa''; Bb, Bb', Bb''; Cc, Cc', Cc''; Dd, Dd', Dd''; Ff, Ff', Ff''. On aura (65) (en supposant que toutes les forces sont placées d'un même côté par rapport à chaque plan), ces trois équations :

$$Ff = \frac{P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd}{P + Q + R + S},$$

$$Ff' = \frac{P \times Aa' + Q \times Bb' + R \times Cc' + S \times Dd'}{P + Q + R + S},$$

$$Ff'' = \frac{P \times Aa'' + Q \times Bb'' + R \times Cc'' + S \times Dd''}{P + Q + R + S},$$

qui feront connoître la position de la résultante, et la place du centre des forces. Car, si l'on prend sur la section commune OI des deux plans OEYI, OVZI, la partie Oh = Ff; qu'on mene, parallèlement à la section commune OV des deux plans OEXV, OVZI, la droite hf' = Ff''; qu'enfin par le point f', on mene, parallèlement à

la section commune OE des deux plans OEXV, OEYI, la droite $f'F = Ff'$: il est clair que la résultante sera dirigée suivant cette ligne $f'F$, et que le point F sera le centre des forces.

Il seroit également facile (67, 68) de résoudre le problême, si toutes les forces n'agissoient pas dans le même sens.

COROLLAIRE.

70. CONNOISSANT la position de la résultante de plusieurs forces paralleles qui agissent dans le même sens, et sachant, d'un autre côté (50), que cette résultante est égale à la somme des forces composantes, on fera équilibre à toutes ces forces, en opposant directement à leur résultante une force égale à leur somme.

REMARQUE.

71. JE ferai ici une remarque, qui, toute simple qu'elle est, ne doit pas être omise, parcequ'elle peut être utile en certains cas. La direction et la quantité de la résultante de plusieurs forces paralleles demeurent toujours les mêmes, quels que soient les points des directions de ces forces, où l'on conçoit qu'elles sont appliquées ; mais la position du centre des forces est subordonné à celle des points dont je viens de parler. Par exemple, dans la Figure 26, les forces P, Q, R, S, étant supposées appliquées aux points A, B, C, D, leur centre est en F ; mais si on supposoit ces forces appliquées en d'autres points de leurs directions, comme a', b', c', d', leur centre seroit en f'. Il est entièrement indifférent, quant à leur effet, que les forces agissent aux points A, B, C, D, ou aux points a', b', c', d' : mais quand on a une fois fixé leurs points d'application, et conséquemment la place de leur centre, par rapport à un objet particulier, il faut raisonner toujours d'après la même supposition dans les autres usages qu'on peut faire du centre

des forces, relativement au même objet; autrement on tomberoit dans l'erreur.

PROPOSITION XI. PROBLÈME.

72. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre entre quatre forces* P, Q, S, T (Fig. 28), *situées dans un même plan, et dirigées d'ailleurs comme on voudra.*

Ces forces doivent être imaginées agir les unes contre les autres, par l'interposition de quelque verge ou de quelque corps inflexible, sans pesanteur, et parfaitement libre.

Les quatre forces proposées étant en équilibre, nous pouvons concevoir (Ax. II) que cet équilibre est produit, parceque la résultante de deux quelconques d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Je suppose donc, par exemple, que la résultante des deux forces P et Q soit égale et directement opposée à la résultante des deux forces S et T. Ainsi, ayant pris sur les directions AP, AQ des deux forces P et Q, à compter de leur point de concours A, les parties AB, AC, pour les représenter; et sur les directions FS, FT des deux forces S et T, à compter de leur point de concours F, les parties FH, FG, pour les représenter : j'acheve les deux parallélogrammes ABDC, FHKG, dont les diagonales AD, FK, nécessairement égales et posées en sens contraires sur une même ligne droite, exprimeront les deux résultantes dont nous venons de parler. Nommons Z chacune de ces résultantes; et, d'un point quelconque O, pris dans le plan de tout le systême, abaissons sur les droites AP, AQ, FS, FT, DFV, prolongées, s'il est nécessaire, les perpendiculaires OE, OI, OL, OM, OV. On aura (57) les deux équations :

$$Z \times OV = P \times OE - Q \times OI,$$
$$Z \times OV = S \times OL - T \times OM;$$

et par conséquent $P \times OE - Q \times OI = S \times OL - T \times OM$, ou bien $P \times OE + T \times OM = Q \times OI + S \times OL$; équation qui exprime les conditions de l'équilibre. On voit

que les quatre forces P, Q, S, T, étant supposées appliquées à un corps, les deux forces P et T tendent à le faire tourner dans un sens autour du point O, tandis que les deux forces Q et S tendent à le faire tourner en sens contraire. Ainsi, *lorsqu'il y a équilibre entre quatre forces appliquées à un corps et situées dans un même plan, si l'on considere leurs moments par rapport à un point quelconque, pris dans ce plan, la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner le corps dans un sens autour de ce point, sera égale à la somme des moments des forces qui tendent à le faire tourner en sens contraire autour du même point.*

Remarque.

73. Il est évident qu'on doit toujours trouver le même résultat, de quelque maniere qu'on combine ensemble les quatre forces proposées. Qu'on prenne, par exemple, la résultante des deux forces P et S (Fig. 29), et celle des deux forces Q et T, il faudra, pour l'équilibre, que ces deux résultantes soient égales et directement opposées. Joignez le point de concours a des deux puissances P et S, et celui n des deux puissances Q et T, par la droite an; puis, ayant pris les lignes ab, ah, nk, ni, pour représenter ces quatre puissances, achevez les deux parallélogrammes $abdh$, $nkgi$. Les diagonales ad, ng, qui expriment les résultantes des deux forces P et S, et des deux forces Q et T, doivent tomber sur la ligne an en sens contraires, et être égales entre elles. Du point O, pris toujours à volonté dans le plan des quatre forces proposées, menez aux directions de ces forces et à la droite an les perpendiculaires OE, OL, OI, OM, Ou. On aura (57) (en nommant Z′ la résultante ad ou ng),

$$Z' \times Ou = P \times OE - S \times OL,$$
$$Z' \times Ou = Q \times OI - T \times OM;$$

et par conséquent $P \times OE - S \times OL = Q \times OI - T \times OM$, ou bien, $P \times OE + T \times OM = Q \times OI + S \times OL$.

Il en seroit de même si l'on supposoit que l'une quelconque des quatre forces fait équilibre à la résultante des trois autres.

COROLLAIRE.

74. SUPPOSONS que nos quatre forces deviennent paralleles deux à deux ; que, par exemple, S devienne parallele à P, et Q parallele à T (Fig. 30). En comparant ensemble les deux Figures 28 et 30, dans lesquelles les mêmes lignes sont exprimées par les mêmes lettres, on voit que les deux parallélogrammes ABDC, FHKG deviennent parfaitement égaux (Fig. 30), et que par conséquent $P = S$, $Q = T$. De plus, on a toujours l'équation $P \times OE - S \times OL = Q \times OI - T \times OM$. Mettant dans cette équation P pour S, Q pour T, on aura $P \times (OE - OL) = Q \times (OI - OM)$, ou $P \times LE = Q \times MI$; ce qui donne, $P : Q :: MI : LE$.

Ainsi, *lorsque quatre forces en équilibre, et situées dans un même plan, sont paralleles deux à deux : 1°. les forces contraires sont égales chacune à chacune ; 2°. deux forces quelconques non paralleles sont entre elles en raison réciproque des distances des forces paralleles.*

Dans la Figure 30, les forces paralleles P et S sont perpendiculaires aux forces paralleles Q et T ; mais cette perpendicularité n'est pas nécessaire.

REMARQUE.

75. LE corollaire précédent peut se trouver par la combinaison des forces que représente la Figure 29. Car imaginons que, pour produire le parallélisme des deux puissances P et S et celui des deux puissances Q et T, la ligne *a*P demeure immobile, tandis que la ligne *a*S tourne autour du point S ; et que la ligne *n*Q demeure immobile, tandis que la ligne *n*T tourne autour du point T. Il est clair que, pendant ce double mouvement, le point *a* chemine jusqu'à l'infini le long de *a*P, et que le point *n* chemine pareillement jusqu'à l'infini le long de *n*Q. Lorsque

enfin S est parallele à P, et T parallele à Q, la résultante des deux forces P et S est égale à leur différence, et la résultante des deux forces Q et T est égale à leur différence (47). Donc, en nommant R la premiere résultante, R′ la seconde, on aura $R=P-S$, ou $R=S-P$; $R'=Q-T$, ou $R'=T-Q$. Or, pour que le corps ne marche ni dans le sens *a*P, ni dans le sens contraire P*a*, il faut que l'on ait $R=o$, ou $P=S$; de même, pour que le corps ne marche ni dans le sens *n*Q ni dans le sens contraire Q*n*, il faut que l'on ait $R'=o$, ou $Q=T$. Quant à l'équation $P\times OE-S\times OL=Q\times OI-T\times OM$ trouvée (73), elle a toujours lieu; et en y mettant P pour S, Q pour T, elle deviendra (Fig. 30) $P\times LE=Q\times MI$. En vertu de cette derniere équation, le corps ne peut prendre aucun mouvement de rotation. Donc enfin il est dans une immobilité absolue.

PROPOSITION XII. LEMME.

76. QUELLE *que soit la direction d'une force* π (Fig. 31), *cette force peut toujours être décomposée en deux autres situées avec elle dans un même plan, et paralleles à deux lignes données de position dans ce plan.*

Menez, suivant la direction HN de la puissance π, un plan, et tracez dans ce plan deux droites OI, OE, qui se coupent au point O, sous un angle donné. Prenez HN pour représenter la puissance π, et ayant mené les droites HZ, HY, paralleles aux lignes OI, OE, achevez le parallélogramme HZNY. A la place de la force HN on pourra prendre (33) les deux forces HZ, HY, qui sont paralleles aux deux lignes OI, OE, données de position dans le plan suivant lequel on imagine que la force π exerce son action.

COROLLAIRE.

77. LA force π, et les angles NHZ, NHY, étant des quantités données, il est clair que les deux forces HZ, HY seront aussi des quantités données.

Supposons, par exemple, que l'angle IOE ou ZHY soit droit, et nommons 1 le sinus total ou le rayon, m l'arc qui, décrit avec ce rayon, mesure l'angle NHZ : à cause du triangle rectangle HZN, qui donne ces deux proportions, $1 : \sin. m :: HN : NZ$ ou HY, et $1 : \sin. HNZ$ ou $\cos. m :: HN : HZ$, on aura Force $HY = \pi \sin. m$, Force $HZ = \pi \cos. m$.

Proposition XIII. Problême.

78. Déterminer *les conditions de l'équilibre entre un nombre quelconque de forces situées dans un même plan, et dirigées d'ailleurs comme on voudra.*

Ces forces doivent toujours être imaginées appliquées à un corps sans pesanteur, et parfaitement libre.

Je mene dans le plan des forces proposées deux lignes OI, OE (Fig. 32), qui se coupent au point O, sous un angle donné. Cet angle est arbitraire ; mais je le supposerai droit, pour fixer les idées, et parceque d'ailleurs cette espece d'angle est la plus commode à employer dans la pratique. Je décompose (76) chacune des forces proposées en deux autres, paralleles chacune à chacune des lignes OI, OE. Par ce moyen, je n'ai plus que deux sortes de forces, les unes paralleles à OI, les autres paralleles à OE. Je réduis (50) toutes les forces qui agissent parallèlement à OI, dans un sens, à la force unique P ; et toutes celles qui agissent dans le sens contraire, à la force unique S : de même je réduis toutes les forces qui agissent parallèlement à OE, dans un sens, à la force unique Q ; et toutes celles qui agissent dans le sens contraire, à la force unique T. L'équilibre proposé est donc ramené à celui des quatre forces P, Q, S, T, paralleles deux à deux ; et les conditions s'en expriment comme dans l'article 74 : c'est-à-dire qu'on a $P = S$, $Q = T$, $P \times EL = Q \times IM$.

Remarque.

79. Les conditions de l'équilibre peuvent être établies

d'une autre maniere qu'il est à propos d'expliquer, parceque cette nouvelle solution facilitera l'intelligence des articles 84 et 86.

Ayant mené, comme tout-à-l'heure, dans le plan des puissances proposées les deux droites OI, OE, perpendiculaires entre elles, et ayant réduit toutes les forces aux quatre P, Q, S, T, paralleles deux à deux aux lignes OI, OE; j'observe que ces forces seront en équilibre, si le corps, auquel on imagine qu'elles sont appliquées, ne peut recevoir, ni dans un sens ni dans un autre, de mouvements paralleles aux lignes OI, OE, et si de plus il ne peut tourner en aucun sens autour du point O; car il est visible que, ces deux conditions étant remplies, la masse entiere du corps et chacune de ses parties seront dans une immobilité absolue.

Or, 1°. les deux forces P et S étant perpendiculaires à OE, ne peuvent (Ax. III) imprimer au corps aucun mouvement parallele à cette ligne; et de même les deux forces Q et T, perpendiculaires à OI, ne peuvent imprimer aucun mouvement parallele à cette ligne. Ainsi les mouvements paralleles à OI ne peuvent être détruits que par l'égalité des forces P et S, qui agissent en sens contraires, parallèlement à cette ligne; et les mouvements paralleles à OE, que par l'égalité des forces Q et T, qui agissent en sens contraires, parallèlement à cette ligne. Il n'y aura, en effet, point de mouvements paralleles, en supposant $P = S$, $Q = T$, puisqu'il n'y a aucune raison pour que des deux forces P et S l'une l'emporte sur l'autre, et que des deux forces Q et T l'une l'emporte sur l'autre.

2°. Du point O comme centre, avec le rayon OE, soit décrit un cercle E*mn*. Imaginons une puissance *s* qui agisse dans le sens E*s* directement contraire au sens de P, et qui ait pour expression $\frac{S \times OL}{OE}$. Cette puissance *s* et la puissance S tendent à produire (49) le même mouvement de rotation autour du point O; car si l'on considere EOV comme une verge inflexible, à laquelle soient appliquées l'une ou l'autre

des puissances S et s, et une puissance parallele K, toutes les autres forces étant supposées anéanties pour un moment : il n'y aura point de mouvement de rotation autour du point O, si on a l'équation $K \times OV = S \times OL$, ou $K \times OV = s \times OE$. Ainsi, par rapport au mouvement de rotation autour du point O, la puissance s peut être substituée à la puissance S. Semblablement, par rapport au même mouvement, à la place de la puissance Q, nous pouvons substituer la puissance parallele q, appliquée en m, suivant la direction mq, et ayant pour expression $\frac{Q \times OI}{Om}$; et à la place de la puissance T, la puissance parallele t, appliquée en m, suivant la direction mt, et ayant $\frac{T \times OM}{Om}$ pour expression. Donc, en ne considérant que le mouvement de rotation, nous avons quatre forces P, s, q, t, appliquées à la circonférence du cercle Emrn, suivant des directions tangentes à cette circonférence; et parmi ces forces, deux, savoir P et t, tendent à faire tourner le cercle dans le sens Emrn; tandis que les deux autres s et q tendent à le faire tourner dans le sens contraire Enrm. Or il est visible qu'une puissance, qui agit suivant une direction tangente à un cercle, produit toujours le même mouvement de rotation autour du centre, en quelque endroit de la circonférence qu'on la suppose appliquée : nous pouvons concevoir encore que la puissance q est appliquée en q', et tire dans le sens Eq'; que la puissance t est appliquée en t', et tire dans le sens Et'. Ainsi nous aurons quatre forces P, t', s, q', qui agissent suivant la même ligne; les deux premieres dans le sens EP, et les deux autres dans le sens directement contraire Es. La résultante des deux premieres est $P + t'$, et la résultante des deux autres est $s + q'$ (24). Donc, pour l'équilibre, on aura (Ax. II), $P + t' = q' + s$. Mettons, dans cette équation, pour t' ou t sa valeur $\frac{T \times OM}{OE}$, pour q' ou q sa valeur $\frac{Q \times OI}{OE}$, pour s sa valeur $\frac{S \times OL}{OE}$; et nous aurons $P + \frac{T \times OM}{OE} =$

$\frac{Q \times OI}{OE} + \frac{S \times OL}{OE}$, ou bien (en multipliant tout par OE), $P \times OE + T \times OM = Q \times OI + S \times OL$, ou $P \times OE - S \times OL = Q \times OI - T \times OM$, ou (en mettant P pour S, et Q pour T), $P \times (OE - OL) = Q \times (OI - OM)$, ou enfin $P \times LE = Q \times MI$.

PROPOSITION XIV. PROBLÊME.

80. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre entre tant de forces qu'on voudra, situées dans un même plan, et appliquées à une verge inflexible, qui est assujettie à tourner autour d'un point fixe.*

Soient (Fig. 33) OA la verge inflexible à laquelle les puissances sont appliquées, O le point fixe autour duquel la rotation tend à se faire dans leur plan. Je mene par le point O, dans ce même plan, les deux droites OE, OI, qui fassent entre elles un angle donné; nous supposerons, comme ci-dessus, que cet angle est droit. Je décompose toutes les forces proposées, chacune en deux sortes de forces, les unes paralleles à OI, les autres paralleles à OE. Ensuite je réduis (50) toutes les forces qui agissent, parallèlement à OI, dans un sens, à la force unique P; et toutes celles qui agissent dans le sens contraire, à la force unique S: pareillement, je réduis toutes les forces qui agissent, parallèlement à OE, dans un sens, à la force unique Q; et toutes celles qui agissent dans le sens contraire, à la force unique T. La question est donc de trouver la relation que les quatre forces P, S, Q, T, paralleles deux à deux, et situées dans un même plan, doivent avoir entre elles, pour qu'il y ait équilibre autour du point O.

Or, pour cela, j'observe qu'il n'est pas nécessaire maintenant, comme dans l'article 78, que la résultante de deux forces soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres; car si cette égalité avoit lieu, la résistance du point fixe O ne contribueroit en rien à l'équilibre, et le pro-

blème se réduiroit au précédent. Mais il faut ici que la résultante des quatre forces P, Q, S, T, passe par le point fixe O, et y trouve sa destruction. Supposons que BA soit la direction de la résultante des deux forces P et Q, et nommons R cette résultante ; que FH soit la direction de la résultante des deux forces S et T, et nommons R' cette résultante. Du point O, soient abaissées les perpendiculaires OB, OH sur les droites AB, FH. On aura (57) les deux équations : $R \times OB = P \times OE - Q \times OI$; $R' \times OH = S \times OL - T \times OM$. Or, puisque la résultante des quatre forces P, Q, S, T, ou des deux forces R et R', doit passer par le point O, on a (38), $R \times OB = R' \times OH$. Ainsi on aura, $P \times OE - Q \times OI = S \times OL - T \times OM$; ou $P \times OE + T \times OM = Q \times OI + S \times OL$, qui est l'équation requise pour qu'il y ait équilibre.

Cette équation fait voir que *la somme des moments des forces* P *et* T, *qui tendent à faire tourner la verge dans un sens autour du point fixe* O, *doit être égale à la somme des moments des forces* Q *et* S, *qui tendent à la faire tourner en sens contraire autour du même point.*

COROLLAIRE.

81. LE point O souffre, dans le sens de la force P ou S, une pression égale à la différence de ces deux forces, et dans le sens de la force Q ou T, une pression égale à la différence de ces deux forces. Car la résultante des deux forces paralleles P et S est une force parallele qui a pour expression $P - S$, ou $S - P$; et la résultante des deux forces paralleles Q et T est une force parallele qui a pour expression $Q - T$, ou $T - Q$. Or ces deux résultantes ne peuvent être détruites que par les résistances contraires de l'appui ; et par conséquent elles sont les mesures des pressions que l'appui souffre dans les sens de leurs directions.

PROPOSITION XV. LEMME.

82. QUELLE *que soit la direction d'une force* π (Fig. 34), *cette force peut toujours être décomposée en trois autres, paralleles chacune à chacune des trois lignes* OH, OI, OE, *qui se croisent au point* O, *et situées deux à deux dans des plans différents.*

Prenez AB pour représenter la puissance π, et menez AD parallele à OH ; par les deux lignes AB, AD, faites passer un plan; et par le point A, menez la droite AC, parallele à la rencontre de ce plan avec le plan EOI ; achevez le parallélogramme ADBC. A la place de la force AB, on pourra prendre les deux forces AD, AC, dont la premiere est parallele à OH. Par le point A, menez les droites AM, AK, paralleles respectivement aux droites OI, OE ; et achevez le parallélogramme AMCK. A la place de la force AC, vous pourrez prendre les deux forces AM, AK, dont la premiere est parallele à OI, et la seconde est parallele à OE. Ainsi, à la place de la force supposée AB, nous avons trois forces AD, AM, AK, paralleles chacune à chacune des trois lignes OH, OI, OE.

COROLLAIRE.

83. LA force π, et les angles BAD, BAC, CAK, CAM, étant des quantités données, les trois forces AD, AM, AK, sont aussi des quantités données.

Supposons, par exemple, que les trois axes OH, OI, OE, soient perpendiculaires entre eux ; que le plan IOE, dans lequel sont comprises les droites OI, OE, perpendiculaires entre elles, soit celui même de la planche, auquel la droite OH est perpendiculaire ; et nommons 1 le rayon, m l'arc qui mesure l'angle BAD, n l'arc qui mesure l'angle CAM. Nous aurons (à cause des triangles rectangles BDA, CMA), $AD = AB \times \cos. m$, BD ou $AC = AB \times \sin. m$, AK ou $CM = AC \times \sin. n = AB \times \sin. m \times \sin. n$, $AM = AC \times \cos. n = AB \times \sin. m \times \cos. n$. Donc, Force AD =

π cos. m, Force AK $= \pi$ sin. m. sin. n, Force AM $= \pi$ sin. m. cos. n.

Proposition XVI. Problème.

84. Déterminer *les conditions de l'équilibre entre un nombre quelconque de forces, dirigées comme on voudra dans des plans différents, et appliquées à un corps sans pesanteur, et parfaitement libre.*

Imaginons (Fig. 35), par un point fixe O, choisi à volonté dans l'espace, trois axes OI, OE, OH, perpendiculaires entre eux. Les deux premiers peuvent être considérés comme situés dans le plan de la planche, et le troisieme comme perpendiculaire à ce plan.

Chacune des forces proposées peut être décomposée (82) en trois autres; la premiere, parallele à OI; la seconde, parallele à OE; et la troisieme, parallele à OH. En faisant successivement cette décomposition pour toutes les forces, nous n'aurons plus que des forces paralleles à nos trois axes. Ainsi je ne considere que ces dernieres; et je réduis (50) toutes les forces qui agissent, parallèlement à OI, dans un sens, à la force unique P; et celles qui agissent dans le sens contraire, à la force unique S : de même je réduis à la force unique Q toutes les forces qui agissent, parallèlement à OE, dans un sens; et celles qui agissent dans le sens contraire, à la force unique T : enfin je réduis toutes les forces qui agissent, parallèlement à OH, dans un sens, à la force unique X; et celles qui agissent dans le sens contraire, à la force unique Y. Par ce moyen, il ne s'agit plus que de trouver les conditions de l'équilibre entre les six forces P, S, Q, T, X, Y, qui sont paralleles deux à deux, et qui peuvent être situées d'ailleurs dans des plans différents. Or il est évident que cet équilibre aura lieu, si le corps auquel on imagine que les six forces précédentes sont appliquées, ne peut recevoir, en aucun sens, de mouvements paralleles aux trois axes OI, OE, OH, et si de plus il ne peut tourner

en aucun sens autour des mêmes axes. Reste à remplir ces deux conditions.

I.

De nos six forces, les deux, Q et T, étant perpendiculaires au plan IOH, dans lequel on peut imaginer que l'axe OI est situé, ne peuvent imprimer (Ax. III) aucun mouvement parallele à ce plan, ni par conséquent aucun mouvement parallele à la droite OI; et les deux, X et Y, étant perpendiculaires au plan IOE, dans lequel on peut concevoir également que l'axe OI est situé, ne peuvent imprimer aucun mouvement parallele à ce plan, ni par conséquent aucun mouvement parallele à l'axe OI. Il n'y a donc que les deux forces P et S, qui tendent à mouvoir le corps parallèlement à OI, l'une dans un sens, l'autre dans le sens contraire. En supposant P = S, ces deux mouvements paralleles ne pourront avoir lieu ni l'un ni l'autre, puisqu'il n'y a aucune raison pour que des deux forces égales P et S, l'une l'emporte sur l'autre.

Semblablement le corps ne prendra, ni dans un sens, ni dans le sens opposé, de mouvement parallele à l'axe OE, si l'on a, Q = T; et il ne prendra, ni dans un sens, ni dans le sens opposé, de mouvement parallele à OH, si l'on a, X = Y.

II.

Il est clair que les deux forces P et Y tendent à faire tourner le corps autour de l'axe OE, dans un sens, tandis que les deux forces S et X tendent à le faire tourner dans le sens contraire autour du même axe. Les deux forces Q et T ne contribuent en rien, ni à l'une ni à l'autre rotation; car on peut concevoir que les quatre forces P, Y, S, X, agissent dans des plans perpendiculaires à l'axe OE; et alors les deux forces Q et T étant perpendiculaires à ces plans, ne peuvent produire (Ax. III) aucuns mouvements paralleles à ces mêmes plans, ni par conséquent aucun mouvement de rotation autour de l'axe OE. Semblablement, les deux forces Q et Y tendent à faire tourner le corps dans un sens autour de

l'axe OI, et les deux forces T et X tendent à le faire tourner en sens contraire; les deux forces P et S n'ont aucune part ni à l'une ni à l'autre rotation. Enfin les deux forces P et T tendent à faire tourner le corps autour de l'axe OH, en un sens, et les deux forces S et Q tendent à le faire tourner dans le sens contraire; les deux forces X et Y ne contribuent en rien, ni à l'une ni à l'autre rotation.

Des points A et F, où les deux forces P et S contraires, et paralleles à l'axe OI, rencontrent le plan HOE, soient menées, parallèlement aux axes OE, OH, les droites AC, AB, FH, FE; de même, des points Δ et Z, où les forces Q et T, contraires et paralleles à l'axe OE, rencontrent le plan HOI, soient menés parallèlement aux axes OE, OH, les droites ΔD, ΔV, Z&, ZI. Enfin des points L et N, où les deux forces X, Y, contraires et paralleles à l'axe OH, rencontrent le plan EOI, soient menées parallèlement aux axes OI, OE, les droites LK, LM, NG, NR.

Cela posé, imaginons que OE est l'axe d'un cylindre droit, qui a BA pour rayon de chacune des sections circulaires, faites perpendiculairement à OE : concevons de plus, qu'on substitue, à la même distance BA, à la place de la force S, une force parallele, représentée par $\frac{S \times FE}{AB}$; à la place de la force X, une force parallele, représentée par $\frac{X \times LK}{AB}$; à la place de la force Y, une force parallele, représentée par $\frac{Y \times NG}{AB}$. Il est clair que chaque force substituée tendant à produire (49 ou 79) la même rotation autour d'un point de l'axe OE, que la force dont elle occupe la place; il est clair, dis-je, que le mouvement de rotation autour de l'axe OE est le même, en vertu des quatre forces P, $\frac{S \times FE}{AB}$, $\frac{X \times LK}{AB}$, $\frac{Y \times NG}{AB}$, qu'en vertu des quatre forces P, S, X, Y. Or les quatre premieres agissant suivant des di-

rections tangentes à la surface d'un cylindre droit, qui a AB pour rayon de sa base, peuvent être supposées exercer leur action dans un même plan tangent à la surface du cylindre, suivant le côté qui passe par le point A, et perpendiculairement à ce même côté. Donc il y aura équilibre entre ces quatre forces, ou, ce qui revient au même, le corps ne pourra tourner, ni dans un sens, ni dans le sens contraire, autour de l'axe OE, si la résultante ou la somme des deux forces P et $\frac{Y \times NG}{AB}$, est égale à la résultante ou à la somme des deux forces $\frac{S \times FE}{AB}$ et $\frac{X \times LK}{AB}$; c'est-à-dire, si on a l'équation $P + \frac{Y \times NG}{AB} = \frac{S \times FE}{AB} + \frac{X \times LK}{AB}$; car alors il n'y a aucune raison pour que l'une des deux résultantes dont nous venons de parler, l'emporte sur l'autre. Cette équation devient (en multipliant tout par AB),

$$P \times AB + Y \times NG = S \times FE + X \times LK.$$

Semblablement, le corps ne prendra point de mouvements de rotation autour des axes OI, OH, si on a les équations :

$$Q \times \Delta V + Y \times NR = T \times ZI + X \times LM,$$
$$P \times AC + T \times Z\&' = S \times FH + Q \times \Delta D.$$

Concluons, de tout ce qui vient d'être démontré, que les conditions de l'équilibre entre les six forces P, S, Q, T, X, Y, sont exprimées en général par les six équations: $P = S$; $Q = T$; $X = Y$; $P \times AB + Y \times NG = S \times FE + X \times LK$; $Q \times \Delta V + Y \times NR = T \times ZI + X \times LM$; $P \times AC + T \times Z\&' = S \times FH + Q \times \Delta D$.

Ces équations font voir, 1°. *que les forces contraires sont égales chacune à chacune;* 2°. *que la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner le corps en un sens autour de chacun de nos trois axes, est égale à la somme des moments des forces qui tendent à le faire tourner dans le sens contraire autour de chacun des mêmes axes.*

REMARQUE.

85. Si, dans les trois dernieres équations, on met P pour S, Q pour T, X pour Y, elles deviendront,

$$P \times (FE - AB) = X \times (NG - LK),$$
$$Q \times (ZI - \Delta V) = X \times (NR - LM),$$
$$P \times (FH - AC) = Q \times (Z\& - \Delta D).$$

Or, par exemple, dans la premiere de ces équations, FE — AB exprime la distance de deux plans passants par les directions des forces P, S, et perpendiculaires à l'axe OH; et NG — LK exprime la distance de deux plans passant par les directions des forces X, Y, et perpendiculaires à l'axe OI. Ainsi, en nommant D et d ces distances, on aura P ou S:X ou Y::d:D. D'où l'on voit que, parmi les quatre forces P, S, X, Y, qui sont paralleles deux à deux, deux forces non paralleles sont réciproquement proportionnelles aux distances des plans passant par leurs directions, et perpendiculaires aux axes OI, OH, auxquels les directions des forces P et S, X et Y, sont paralleles. On trouvera des résultats analogues pour les deux autres équations.

PROPOSITION XVII. PROBLÊME.

86. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre entre un nombre quelconque de forces appliquées à un corps, sans pesanteur, qui a simplement la liberté de pirouetter en toutes sortes de sens autour du point fixe O.*

Ayant mené, par le point fixe O, les trois axes OI, OE, OH, perpendiculaires entre eux, et ayant réduit, comme ci-dessus, toutes les forces proposées aux six forces P, S, Q, T, X, Y, paralleles à ces trois axes: j'observe que les mouvements paralleles aux trois axes, sont empêchés en tous sens par la résistance du point fixe O, qui est supposée s'y opposer de tous côtés; et que par conséquent il s'agit

seulement de trouver les conditions qui doivent avoir lieu, pour que le corps ne prenne, en aucun sens, des mouvements de rotation autour de nos trois axes. Or ces conditions sont exprimées par les trois équations :

$$P \times AB + Y \times NG = S \times FE + X \times LK,$$
$$Q \times \Delta V + Y \times NR = T \times ZI + X \times LM,$$
$$P \times AC + T \times Z\& = S \times FH + Q \times \Delta D.$$

Par où l'on voit que *la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner le corps, dans un sens, autour de chacun de nos trois axes, doit être égale à la somme des moments des forces qui tendent à le faire tourner, en sens contraire, autour de chacun des trois mêmes axes.*

COROLLAIRE.

87. En nommant respectivement I, E, H, les pressions que souffre l'appui O, suivant les directions des trois axes OI, OE, OH, on aura, $I = P - S$, ou $I = S - P$; $E = Q - T$, ou $E = T - Q$; $H = X - Y$, ou $H = Y - X$. Car l'appui souffre, en vertu des deux forces P et S, une pression égale à leur résultante ; en vertu des deux forces Q et T, une pression égale à leur résultante ; et en vertu des deux forces X et Y, une pression égale à leur résultante.

CHAPITRE II.

Du centre de gravité.

88. Tous les corps sont pesants : abandonnés à eux-mêmes, ils descendent suivant des directions qui tendent au centre du globe terrestre. Les parties dont ils sont composés forment elles-mêmes de petits corps pesants ; de sorte que

tout poids fini et sensible peut être regardé comme l'assemblage ou le systême d'une infinité de petits poids liés entre eux, de maniere qu'ils ne forment qu'un même tout; et comme le point où vont concourir les directions de ces petits poids, c'est-à-dire le centre de la terre, est placé à une distance très grande relativement à l'étendue que leur systême occupe sur la surface de notre globe, on peut regarder, sans craindre aucune erreur sensible, toutes leurs directions comme paralleles entre elles. En effet, on trouve que le rayon de la terre étant d'environ 1500 lieues, un espace de 16 toises, pris à sa surface, soutend un angle qui est à peine de 1 seconde.

Il est démontré, par les phénomenes astronomiques, qu'un même corps ne pese pas également à différentes distances du centre de la terre, et que la pesanteur d'un corps qui s'éloigne ou s'approche du centre de la terre, diminue ou augmente en même raison que le quarré de la distance à ce centre augmente ou diminue. Mais cette variation de pesanteur ne peut pas être sensible dans les corps que la statique ordinaire considere, parceque ces corps sont toujours placés à des distances du centre de la terre, qui ne different pas sensiblement les unes des autres.

On a encore observé que la pesanteur d'un même corps augmente en allant de l'équateur aux poles; et cela parceque la force centrifuge, qui diminue la pesanteur naturelle, devient plus petite elle-même en allant de l'équateur aux poles. Mais les parties d'un même corps ou d'un systême de corps occupent trop peu d'étendue sur la surface de la terre, pour que d'une partie à l'autre on doive avoir égard à la différence de pesanteur, occasionnée par la cause qu'on vient d'indiquer.

89. D'APRÈS ces remarques, nous regarderons la pesanteur de chaque molécule de matiere comme une force toujours constante, et les directions des pesanteurs de toutes les parties d'un même corps ou systême de corps, comme

paralleles entre elles. Ainsi la théorie que nous avons donnée dans le chapitre précédent, sur la composition et décomposition des forces paralleles, s'appliquera aux corps pesants, en supposant que ces forces soient les pesanteurs des parties des corps mêmes.

On appelle *ligne verticale*, la ligne suivant laquelle les corps tombent par la pesanteur; *ligne horizontale*, une ligne perpendiculaire à la verticale; *plan vertical*, un plan qui passe par une ligne verticale; *plan horizontal* ou *horizon*, un plan auquel la direction de la pesanteur est perpendiculaire, ou qui contient deux lignes horizontales qui se coupent.

90. Cela posé, soient A, B, C, D (Fig. 15), les corps élémentaires qui composent un même système; et supposons que les forces paralleles P, Q, R, S, appliquées à ces corps, en soient les pesanteurs, qui agissent toutes dans le même sens : nous voyons,

1°. Que le poids total du système est égal (50) à la somme des poids élémentaires dont il est composé, puisque la résultante de toutes les forces P, Q, R, S, est égale à $P+Q+R+S$.

2°. Dans quelque position qu'on mette le système, son poids total demeure toujours le même, puisque chaque corps élémentaire est toujours également pesant, et qu'en vertu du même article 50, la résultante de toutes les pesanteurs qui ont des directions paralleles, est toujours égale à leur somme.

3°. Conséquemment à l'article 54, quelques situations qu'on puisse donner au système, pourvu que les corps élémentaires conservent entre eux les mêmes distances, les directions du poids de tout le système se couperont toutes en un même point. Ce point, que nous avons appelé en général *centre des forces paralleles*, s'appellera ici *centre de gravité;* les forces paralleles étant maintenant les pesanteurs des parties élémentaires d'un même système de corps, ou

d'un corps sensible, qu'on peut regarder comme le système des molécules de matiere dont il est composé.

91. On voit, par cette notion du centre de gravité, que, si l'on suspend un corps par un cordon dont la direction prolongée passe par ce point, le corps demeurera immobile dans toutes les situations possibles. Il existe un tel point dans tous les corps ou systêmes de corps ; mais il ne falloit pas se contenter d'affirmer la chose, comme la plupart des auteurs de mécanique l'ont fait : elle avoit besoin d'être démontrée ; elle l'est par l'article 54, déja cité.

92. De la suit une maniere fort simple de déterminer par l'expérience le centre de gravité d'un corps de figure quelconque. Suspendez ce corps par un cordon qui le soutienne successivement par deux points différents : prolongez par la pensée les deux directions du cordon au-dedans du corps ; le point où elles se couperont, sera le centre de gravité cherché.

Quand le corps est trop considérable pour pouvoir être ainsi suspendu, il faut en faire un autre plus petit qui lui soit semblable, et déterminer le centre de gravité de celui-ci, comme on vient de le dire. Ce centre fera connoître proportionnellement la position de celui du grand corps.

93. Toutes les propriétés qui ont été démontrées ci-dessus, pour les moments des forces paralleles qui agissent dans le même sens, ont lieu pour un système de corps soumis à l'action de la pesanteur. Résumons ici ces propriétés, en les appliquant au sujet présent.

94. Soit un nombre quelconque de poids P, Q, R, S (Fig. 36 et 37), enfilés par une même verge inflexible sans pesanteur. Considérons leurs moments, et celui de leur système réuni au centre de gravité G, par rapport au point E de la verge : on aura, $R \times RE + S \times SE \pm P \times PE \pm Q \times QE = (P + Q + R + S) \times GE$.

Cela est clair (68), en imaginant que tous les corps A, B, C, D (Fig. 15), sont placés sur une même ligne; que les forces P, Q, R, S, sont leurs poids, et que l'on rapporte les moments à un point de la ligne qui les enfile.

Si (Fig. 37) le point E tombe sur le point G, on aura, $P \times GP + Q \times GQ = R \times GR + S \times GS$; c'est-à-dire que, *par rapport au centre de gravité, la somme des moments des corps qui sont d'un côté, est égale à la somme des moments des corps qui sont de l'autre côté.*

95. Il est également clair que si l'on mene l'axe quelconque Es (Fig. 36 et 37), et les paralleles Pp, Qq, etc., on aura, $R \times Rr + S \times Ss \pm P \times Pp \pm Q \times Qq = (P + Q + R + S) \times Gg$, puisqu'on a cette suite de proportionnelles, $PE:QE:RE:SE:GE::Pp:Qq:Rr:Ss:Gg$, et qu'on peut, par conséquent, dans l'équation générale de l'article précédent, substituer à la place des lignes PE, QE, etc., leurs proportionnelles Pp, Qq, etc.

Lorsque l'axe Es (Fig. 37) passe par le centre de gravité G, on a, $P \times Pp + Q \times Qq = R \times Rr + S \times Ss$.

96. Les articles 58, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 66, s'appliquent ici littéralement, en supposant que les forces P, Q, R, S, sont les poids des corps A, B, C, D, auxquels elles sont appliquées. On voit que *si l'on considere les moments de plusieurs poids, et celui de leur système réuni au centre de gravité, par rapport à un axe ou à un plan, la somme ou la différence des moments de ces poids, sera égale au moment de leur système; et si l'axe ou le plan des moments passe par le centre de gravité, la somme des moments des poids qui sont d'un côté, sera égale à la somme des moments des poids qui sont de l'autre côté.*

Par ces propriétés, on trouve dans tous les cas la position du centre de gravité du système, comme nous l'avons expliqué. Le lecteur se souviendra que les distances des poids à l'axe ou au plan des moments sont toujours censées paralleles entre elles.

97. On fait un grand usage des centres de gravité dans la mécanique. Il est donc essentiel de se rendre très familieres les méthodes que nous avons données pour les déterminer. Elles supposent, comme on voit, qu'un système, ou un corps regardé comme un système d'autres corps, est composé de parties isolées, dont chacune est regardée comme ramassée ou *concentrée* en un seul et même point, qui en est le centre de gravité particulier. Mais, toujours vraies dans la théorie, ces méthodes ne sont pas toujours susceptibles de précision dans la pratique, parceque souvent les parties élémentaires du système ayant des grosseurs sensibles, ne peuvent pas être censées réunies chacune en un même point; et que, d'un autre côté, l'irrégularité fréquente de leurs figures, ou quelquefois de leurs poids, quand elles ne sont pas homogenes dans toute leur étendue, ne permet de déterminer leur centre de gravité particulier que par estime ou d'une maniere approchée.

98. Il y a un grand nombre de cas dans lesquels on peut, à l'aide de la géométrie, déterminer exactement et simplement le centre de gravité d'un corps. Ces cas embrassent tous les corps homogenes dont la figure est assujettie à une loi *connue* de continuité. Je vais donner des exemples de ces sortes de déterminations; mais ce détail demande à être précédé de quelques remarques.

99. On sait, et nous l'avons déja observé (5), que la géométrie ne considere que les volumes; elle ne pourroit, par conséquent, toute seule, que déterminer le *centre de volume* d'un corps de figure donnée. Mais, dans les corps homogenes dont il s'agit ici, toutes les molécules élémentaires peuvent être regardées comme égales entre elles, et comme également pesantes. Le centre de volume sera donc le même que le centre de gravité ou de masse. Ainsi la mécanique et la géométrie peuvent se prêter un secours mutuel pour déterminer ce point.

100. Après avoir trouvé la place du centre de gravité d'un corps homogene, on pourra imaginer que toute la pesanteur du corps est réunie à ce point; mais, pour mesurer cette force, il faut avoir égard à l'espece de matiere dont le corps est formé. Par exemple, deux spheres, l'une d'or, l'autre d'argent, de même diametre, ne pesent pas également; leurs poids sont entre eux dans le rapport de 19 à 10 environ. Il est clair, en général, que le poids d'un corps homogene est d'autant plus grand, que son volume est plus grand, et qu'il contient plus de parties pesantes, ou qu'il a plus de densité. Par conséquent, si l'on nomme G le volume de ce corps, p sa densité ou *pesanteur spécifique*, c'est-à-dire le poids de l'une des parties égales (par exemple, d'un pouce cube), dans lesquelles le volume peut être censé partagé; le poids absolu ou total du corps sera représenté par le produit $G \times p$. Dans l'exemple de nos deux spheres, les volumes G sont les mêmes, les pesanteurs spécifiques p sont entre elles comme les nombres 19 et 10 environ. Je suppose qu'on ne perdra pas cette observation de vue dans l'usage qu'on pourra faire des centres de gravité; mon objet actuel est simplement de déterminer ces points dans quelques uns des cas que j'ai indiqués (98).

Exemple I.

101. Déterminer *le centre de gravité d'une ligne droite, celui de l'aire ou du contour d'un parallélogramme, d'un polygone régulier, d'un cercle, d'un parallélépipede, d'un prisme à bases régulieres, d'un cylindre, d'une sphere*, etc.

On a déja observé (99) que le centre de gravité d'un corps homogene est le même que le centre de volume. Or, pour une ligne droite, supposée uniformément pesante dans toute sa longueur, ce centre commun est dans son milieu; pour l'aire ou le contour d'un parallélogramme, il est au point d'intersection de deux droites menées par les milieux

des côtés opposés ; pour un polygone régulier, un cercle, un parallélipipede, etc., il est au centre même de figure. Tout cela est évident ; mais si on en demande une démonstration rigoureuse, la voici pour la ligne droite et l'aire du parallélogramme. On raisonnera d'une maniere analogue pour tous les autres cas.

102. Soit donc en premier lieu la droite AB (Fig. 38) chargée de petits poids égaux dans tous ses points. Si on la suspend par son milieu C, elle demeurera en équilibre ; car chaque paire de poids pris de part et d'autre, à égales distances du point C, a son centre de gravité en ce point (45). D'où il suit (50) que la résultante de tous les poids qui forment la ligne AB est dirigée suivant la verticale KC. Qu'on incline la ligne en *ab* : la résultante de tous les poids sera encore dirigée suivant la verticale KC. Donc (91) le milieu C est le centre de gravité de la ligne. On voit ici comment la mécanique et la géométrie s'aident mutuellement pour la détermination du centre de gravité ; l'une fait voir que ce centre est placé au milieu de la ligne, et l'autre apprend à trouver ce milieu.

103. Considérons en second lieu le parallélogramme ABDE (Fig. 39) ; et imaginons que sa surface est composée d'une infinité de filets uniformément pesants, paralleles aux côtés AB, ED. Il est clair que chaque élément ayant son centre de gravité dans son milieu, si l'on suspend le parallélogramme par le moyen d'un cordon KG, qui divise en deux parties égales aux points F, G, les côtés AB, ED, le parallélogramme demeurera immobile. Par la même raison, si l'on imagine que la surface du parallélogramme est composée d'une infinité d'éléments paralleles à AE et à BD, et qu'on le suspende par un cordon OI, qui divise en deux parties égales les côtés AE, BD, il demeurera encore immobile. Donc (92) le point C, intersection des droites KG, OI, est le centre de gravité du parallélogramme. Cette intersection se trouve par la géométrie.

Exemple II.

104. Déterminer *le centre de gravité de l'aire d'un triangle* ABC (Fig. 40).

Des angles A et B, soient menées aux milieux D et E des côtés opposés BC, AC, les droites AD, BE, qui se coupent en G; ce point G est le centre de gravité de l'aire du triangle. Car, 1°. en regardant l'aire du triangle comme composée d'une infinité d'éléments paralleles à BC, tous ces éléments auront leurs centres de gravité particuliers dans la droite AD. Donc, si l'on suspend le triangle au point K, dans la direction KAD, il demeurera immobile. 2°. Par la même raison, en regardant l'aire du triangle comme composée d'une infinité d'éléments paralleles à AC, et suspendant cette figure dans la direction OBE, devenue verticale, elle demeurera immobile. Donc (92) le point G, intersection des droites KAD, OBE, est son centre de gravité.

Corollaire.

105. Qu'on mene la droite DE; elle est parallele à AB, puisque les côtés CB, CA, sont coupés proportionnellement en D et E. Donc les deux triangles CDE, CBA sont semblables, et les deux triangles DGE, AGB le sont aussi. Par conséquent on aura cette suite de rapports égaux, $CD:CB::DE\cdot BA::DG:GA$. Or $CD=\frac{CB}{2}$; donc $DG=\frac{GA}{2}$, et $DG=\frac{AD}{3}$, $AG=\frac{2}{3}AD$. Ainsi le *centre de gravité d'un triangle est placé au tiers de la droite menée d'un angle au milieu du côté opposé, à compter de ce côté, ou aux deux tiers, à compter du sommet.*

Exemple III.

106. Déterminer *le centre de gravité de l'aire d'un trapeze* DABC (Fig. 41).

Soient les points E et H les milieux des côtés paralleles DC, AB du trapeze; F et G les milieux des parties égales ED, EC; menez les droites EH, EA, EB, AF, BG; prenez $EN = \frac{2}{3}EH$, $AI = \frac{2}{3}AF$, $BL = \frac{2}{3}BG$; joignez les points I et L par la droite IL, qui sera évidemment parallele aux droites DC, AB, et qui coupera EH au point M, de maniere que MI = ML. Les points N, I, L, sont les centres de gravité des trois triangles EAB, AED, BEC, qui composent la surface totale du trapeze. Or les deux triangles AED, BEC, égaux en surfaces, pouvant être regardés comme des poids égaux, placés en I et L, le centre de gravité de leur système est placé en M, milieu de la droite IL. Représentons par la simple lettre M la somme de ces poids, ou l'aire totale des deux triangles, et par la lettre N le poids ou l'aire du triangle EAB: le centre de gravité des deux poids M et N est placé sur la droite MN, en un point P, dont on trouve la position par la méthode qui a été employée (50) pour trouver le centre de plusieurs forces paralleles. Cette méthode donne ici, $MP = MN \times \frac{N}{M+N}$. Or, $MN = \frac{1}{3}EH$, et les trois triangles EAB, AED, BEC, ayant même hauteur, peuvent être représentés par leurs bases AB, ED, EC. Ainsi, en substituant $\frac{1}{3}EH$ pour MN, AB pour N, DC pour M, on aura $MP = \frac{1}{3}EH \times \frac{AB}{AB+DC}$, ou $EP = \frac{1}{3}EH \times \left(\frac{2AB+DC}{AB+DC}\right)$.

Exemple IV.

187. Déterminer *le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque.*

Soit, par exemple, le pentagone ABCDE (Fig. 42), dont il faille déterminer le centre de gravité.

Ayant tiré les diagonales AC, AD, je mene aux milieux F, H, Q, des côtés BC, CD, DE, les droites AF, AH, AQ; je prends $AO = \frac{2}{3}AF$, $AI = \frac{2}{3}AH$, $AN = \frac{2}{3}AQ$: les points O, I, N, sont les centres de gravité des triangles ABC, ACD, ADE. En joignant les points O et I par la droite OI, le centre de gravité du quadrilatere ABCD sera placé sur cette ligne. Pour savoir en quel endroit K il est placé, je fais cette proportion (50), le quadrilatere ABCD : au triangle ACD::OI:OK. Du point K, au centre de gravité N du triangle ADE, je mene la droite KN, et je la divise en G, de maniere qu'on ait la proportion, le pentagone ABCDE : au triangle ADE::KN:KG; le point G sera le centre de gravité du pentagone.

Nous remarquerons qu'ayant une fois trouvé les centres de gravité O, I, N (Fig. 43) des triangles ABC, ACD, ADE, la position du centre de gravité G de tout le polygone ABCDE peut être déterminée d'une maniere plus expéditive que la précédente, en employant les propriétés des moments. Pour cela, menons à volonté dans le plan du polygone les deux axes SV, ST; je suppose que l'un soit vertical, l'autre horizontal, pour plus de simplicité. Des points O, I, N, G, soient tirées perpendiculairement à nos deux axes les droites Oo, Oo'; Ii, Ii'; Nn, Nn'; Gg, Gg'. On aura (96) ces équations : $ABCDE \times Gg = ABC \times Oo + ACD \times Ii + ADE \times Nn$; $ABCDE \times Gg' = ABC \times Oo' + ACD \times Ii' + ADE \times Nn'$, lesquelles donnent :

$$Gg = \frac{ABC \times Oo + ACD \times Ii + ADE \times Nn}{ABCDE},$$

$$Gg' = \frac{ABC \times Oo' + ACD \times Ii' + ADE \times Nn'}{ABCDE}.$$

Or, dans ces deux dernieres équations, toutes les parties des deux seconds membres sont connues, ou mesurables; on connoîtra donc aussi Gg et Gg'. Prenant sur ST la partie $Sg' = Gg$, et menant par le point g' la droite $g'G$, parallele à SV, et égale à la valeur qu'on a trouvée pour Gg' : le point G sera le centre de gravité demandé.

EXEMPLE V.

108. DÉTERMINER *le centre de gravité du périmetre d'un polygone rectiligne quelconque.*

Les côtés du polygone étant considérés comme des lignes droites uniformément pesantes, ont leurs centres de gravité placés à leurs milieux. On peut donc regarder ces milieux comme les points d'application de forces paralleles, qui sont ici des poids proportionnels aux côtés du polygone; et par conséquent on déterminera, par l'article 50, le centre de ces forces paralleles, ou le centre de gravité de tout le contour du polygone.

La méthode des moments peut être employée ici pour simplifier la solution.

On voit que le centre de gravité du contour d'un polygone est placé hors de ce contour : alors, et en général dans tous les cas où le centre de gravité d'un corps est placé hors de ce corps, il faut concevoir que ce centre est solidement lié avec ce corps, par le moyen de verges sans pesanteur.

EXEMPLE VI.

109. DÉTERMINER *le centre de gravité* G *d'un arc de cercle* AOB (Fig. 44).

Il est clair d'abord que le centre de gravité cherché est placé sur le rayon CO, qui divise l'arc AOB en deux parties égales. Fixons sa place par le moyen des moments.

Je conçois que l'arc AOB est partagé en une infinité de parties *mn*, qu'on peut regarder comme de petites lignes

droites ; et je considere leurs moments par rapport au diametre HK parallele à la corde AB. La somme de tous ces moments sera égale (96) au moment du systême, c'est-à-dire à $AOB \times CG$. Soit q le milieu ou centre de gravité de mn. Des points A, B, n, m, q, soient abaissées les perpendiculaires AV, BZ, mx, ny, qz, sur HK ; soit menée mr parallele à la même ligne HK, et soit tiré le rayon Cq. Les deux triangles nrm, Czq, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont semblables, et donnent mn : mr ou xy : : Cq ou CO : qz. Donc $mn \times qz = xy \times CO$.

Le même raisonnement et la même conclusion ont lieu pour tous les autres éléments de l'arc AOB. D'où il suit évidemment que la somme de tous les moments $mn \times qz$ est égale au produit de la ligne finie VZ ou AB multipliée par CO. On a donc aussi $AOB \times GC = AB \times CO$, et par conséquent $GC = \frac{AB \times CO}{AOB}$. Ainsi, *la distance du centre de gravité d'un arc de cercle au centre du cercle, est égale au quotient du produit de la corde et du rayon, divisé par l'arc.*

Corollaire.

110. Si l'on mene un diametre quelconque IL, qu'ensuite on lui abaisse des points A, B, G, les perpendiculaires AD, BE, GT, et qu'on lui mene la parallele AN ; les deux triangles ANB, GTC, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, seront semblables, et donneront AB : CG : : AN ou DE : $GT = \frac{CG \times DE}{AB} = \frac{CO \times DE}{AOB}$, c'est-à dire que *la distance du centre de gravité de l'arc* AOB *au diametre* IL *est égale au quotient du produit du rayon et de la partie du diametre comprise entre les perpendiculaires abaissées des extrémités de l'arc, divisé par l'arc.*

Exemple VII.

111. Trouver *le centre de gravité* G *du secteur de cercle* ACBO (Fig. 45).

Le centre de gravité G est placé sur le rayon CO, qui divise le secteur en deux parties égales. Reste à savoir en quel endroit.

Imaginons que le secteur ACBO est composé d'une infinité de triangles Cmn. Soit q le milieu de la base mn, et soit tiré le rayon Cq. Qu'on prenne sur ce rayon la partie $Ct = \frac{2}{3} Cq$; le point t sera le centre de gravité du triangle élémentaire Cmn. Des points A, B, m, n, q, t, soient menées les perpendiculaires AV, BZ, mx, ny, qz, tu au diametre HK supposé parallele à la corde AB; et soit tirée mr parallele à la même corde. Le moment du triangle Cmn, par rapport à HK, sera exprimé par $\frac{mn \times Cq}{2} \times tu$, ou bien (en observant que $tu = \frac{2}{3} qz$, et mettant CO pour Cq), par $\frac{mn \times CO}{2} \times \frac{2}{3} qz$. Or, à cause des triangles semblables nrm, Czq, on a, $mn \times qz = xy \times CO$. Donc le moment proposé est $\frac{\overline{CO}^2}{2} \times \frac{2}{3} xy$. Donc la somme des moments de tous les triangles élémentaires, dont le secteur entier ACBO est composé, est $\frac{\overline{CO}^2}{2} \times \frac{2}{3} VZ$ ou $\frac{\overline{CO}^2 \times AB}{3}$. Or cette somme (96) est égale à ACBO $\times$ CG, c'est-à-dire à $\frac{AOB \times CO}{2} \times CG$. On aura donc $\frac{AOB \times CO}{2} \times CG = \frac{\overline{CO}^2 \times AB}{3}$; d'où l'on tire $CG = \frac{2CO \times AB}{3AOB}$. La position du point G sur le rayon CO est donc connue.

Corollaire.

112. Connoissant le centre de gravité du secteur AC BO, et sachant trouver (104) celui du triangle ACB, on déterminera sans peine celui du segment ABO, en considérant que le moment du segment, par rapport au centre,

est égal à la différence des moments du secteur et du triangle. Ce calcul est si facile qu'il suffit de l'indiquer.

Exemple VIII.

113. Trouver *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire* SABC (Fig. 46).

Des angles A et S soient menées au milieu D du côté BC, les droites AD, SD; et ayant fait $DE = \frac{DA}{3}$, $DF = \frac{DS}{3}$, soient menées les droites SE, AF, qui se couperont nécessairement en G, puisqu'elles sont dans le même plan ASD. Le point E est le centre de gravité du triangle ABC, et le point F celui du triangle SBC (105). Donc, si l'on regarde la pyramide comme composée d'une infinité de triangles paralleles à ABC, et si l'on considere que tous ces triangles étant semblables à ABC, la droite SE passe nécessairement par leurs centres de gravité particuliers, on verra que la pyramide, suspendue au point K, dans la direction KSE, demeurera immobile. Par la même raison, en regardant la pyramide comme composée d'éléments paralleles au triangle SBC, si on la suspend au point O, dans la direction OAF devenue verticale, elle demeurera encore immobile. Donc le point G est son centre de gravité.

Corollaire.

114. Qu'on joigne les points E et F par la droite EF, elle sera parallele à AS, puisque les droites DA, DS, sont coupées proportionnellement en E et F. Donc les deux triangles DEF, DAS sont semblables, de même que les deux triangles EGF, SGA. Ainsi on a cette suite de rapports égaux, DE:DA :: EF:AS :: EG:GS. Mais $DE = \frac{DA}{3}$; donc $EG = \frac{SG}{3} = \frac{SE}{4}$, et $SG = \frac{3}{4}SE$. Par conséquent, *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est placé aux trois*

quarts de la ligne menée de son sommet au centre de gravité de sa base, à compter du sommet, ou au quart de la même ligne, à compter de la base.

EXEMPLE IX.

115. DÉTERMINER *le centre de gravité d'une pyramide quelconque.*

Soit, par exemple, la pyramide pentagonale SABCDE (Fig. 47). Partageons sa base en triangles par les diagonales AD, AC; et concevons que ces triangles sont les bases d'autant de pyramides triangulaires. Du sommet S au centre de gravité F du triangle AED, et au centre de gravité Q de tout le polygone ABCDE, soient menées les droites SF, SQ. Soit divisée la droite SF, au point f, de maniere que $Sf = \frac{3}{4}$ SF; le point f sera le centre de gravité de la pyramide triangulaire SEAD; et si par ce point on fait passer le plan *abcde*, parallele à la base ABCDE, ce plan divisera proportionnellement à SF et à Sf toutes les lignes qu'on pourra mener du sommet de la pyramide à la base: il contiendra donc les centres de gravité de toutes les pyramides triangulaires dont la pyramide polygonale est composée, et par conséquent aussi le centre de gravité de cette derniere pyramide. Or, en regardant cette même pyramide comme composée d'une infinité d'eléments paralleles à sa base ABCDE, et considérant que tous ces éléments sont semblables à ABCDE, il est évident que la droite SQ passe par leurs centres de gravité particuliers, et qu'elle contient par conséquent le centre de gravité de toute la pyramide. Donc ce centre est au point d'intersection G de la droite SQ avec le plan *abcde*. Or la droite SQ est divisée en G, de maniere que $SG = \frac{3}{4}$ SQ. Ainsi, *le centre de gravité de toute pyramide est aux trois quarts de la ligne menée de son sommet au centre de gravité de sa base, à compter du sommet, ou au quart de la même ligne, à compter de la base.*

COROLLAIRE I.

116. TOUT cône étant une pyramide dont la base est un polygone d'une infinité de côtés, a son centre de gravité placé aux trois quarts de la ligne menée de son sommet au centre du cercle qui lui sert de base, à compter du sommet, ou au quart de la même ligne, à compter de la base.

COROLLAIRE II.

117. QU'IL s'agisse de trouver le centre de gravité r d'un tronc ABCDEMHIKL (Fig. 48), à bases paralleles, de pyramide ou de cône. On voit d'abord qu'en supposant que SABCDE soit la pyramide entiere dont le tronc fait partie, SHIKLM la pyramide retranchée, et menant du sommet S au centre de gravité Q de la base ABCDE la droite SQ, qui passe nécessairement par le centre de gravité q du polygone HIKLM semblable à ABCDE; on voit, dis-je, que le tronc, supposé suspendu suivant la direction SQ, demeurera immobile, et que par conséquent son centre de gravité r est placé sur la droite SQ. Comme il seroit embarrassant de trouver d'une maniere directe une autre suspension d'équilibre, servons-nous des propriétés des moments pour achever la solution, c'est-à-dire pour fixer sur la droite SQ la place r du centre de gravité cherché. Nommons S le solide de la pyramide entiere, s celui de la pyramide retranchée, et par conséquent $S - s$ celui du tronc. En considérant les moments des trois solides S, s, $S - s$, par rapport au sommet S, on aura (94), $S \times \frac{3}{4} SQ = s \times \frac{3}{4} Sq + (S - s) \times Sr$, ou bien $S \times \frac{3}{4} SQ - s \times \frac{3}{4} Sq = (S - s) \times Sr$, et par conséquent $Sr = \frac{S \times \frac{3}{4} SQ - s \times \frac{3}{4} Sq}{S - s}$. Or toutes les quantités S, s, SQ, Sq, sont connues, ou déterminables par la géométrie et par ce qui précede; on connoîtra donc Sr.

CHAPITRE III.

Application des principes précédents à l'équilibre des Machines.

118. Tout agent, de quelque nature qu'il soit, ne recele en lui-même qu'une certaine mesure de force qu'il n'est jamais possible d'augmenter réellement. Mais on peut employer une même force, de maniere qu'elle produise plusieurs effets qui, ayant tous la même valeur absolue, different par leurs éléments ou facteurs. Tel est l'objet général des machines. La force appliquée à une machine quelconque peut toujours être représentée par le produit constant $P \times V$, (P étant un poids, V une certaine vîtesse); et chaque machine particuliere a une disposition, telle que si P augmente, V diminue en même raison ; et réciproquement : c'est ce qu'on verra en détail dans la théorie suivante. On y apprendra à déterminer le véritable produit qu'on doit attendre d'une machine, et à se prémunir contre les belles promesses de certains machinistes qui, ignorant les lois de la mécanique, non seulement ne tiennent pas ce qu'ils annoncent, mais souvent même ne savent pas donner aux pieces de leurs propres machines la combinaison la plus avantageuse.

119. Il y a une infinité de machines différentes, et tous les jours le nombre s'en accroît ; mais elles se réduisent toutes dans le fond à sept especes, ou n'en sont que des combinaisons plus ou moins simples. Ces sept machines primordiales sont la *Machine funiculaire*, le *Levier*, la *Poulie*, le *Tour* ou *Cabestan*, le *Plan incliné*, la *Vis* et le *Coin*.

Je me propose ici de déterminer les conditions de l'équilibre dans ces machines, et dans quelques autres qui en dérivent. Je fais abstraction du frottement ; je suppose que les pieces solides qui peuvent entrer dans une machine, aient une inflexibilité absolue qui ne leur permette pas de changer de figure ; les cordes, lorsqu'il y en a, sont regardées comme des fils parfaitement flexibles, ou du moins leur action est supposée s'exercer librement suivant la direction de leur axe ; et, dans ce dernier cas, quand une corde s'enveloppe autour d'une roue, le rayon de la roue doit être censé augmenté de celui de la corde. Nous examinerons dans la suite les résistances que les machines éprouvent, lorsqu'elles sont prêtes à se mouvoir.

Lorsqu'un corps agit par sa pesanteur sur une machine, cette force doit être imaginée réunie toute entiere au centre de gravité du corps, et s'exercer suivant la verticale qui passe par ce point.

SECTION I.

De la Machine funiculaire.

120. ON appelle *machine funiculaire* celle où l'on n'emploie que des cordes pour soutenir un poids, ou pour contre-balancer plusieurs puissances.

Je négligerai le poids des cordes, lorsque je n'avertirai pas expressément qu'il faut y avoir égard.

PROPOSITION I. PROBLÊME.

121. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre d'une machine funiculaire composée de trois cordons assemblés à un même nœud fixe.*

I.

Soient trois puissances P, Q, S (Fig. 49), appliquées aux trois cordons AP, AQ, AS, concourants au point A, et en équilibre entre elles. La premiere sera, si l'on veut, un poids. Puisqu'il y a équilibre, la résultante R des deux puissances Q et S est nécessairement égale et directement opposée (Ax. II) à la puissance P. Or les trois puissances Q, S, R, sont dans un même plan (32). Donc les trois puissances P, Q, S, y sont aussi; et si, ayant pris AD sur PA prolongée, pour exprimer la puissance P ou la résultante R, on acheve le parallélogramme ABDC, on aura (34) cette suite de rapports égaux, P:Q:S :: AD:AB:AC ou BD.

Il est clair que les puissances P, Q, S, expriment les tensions des cordons auxquels elles sont appliquées. Ainsi, par une puissance appliquée à un cordon, ou par la tension de ce cordon, nous entendrons la même chose.

II.

Les trois puissances P, Q, S, peuvent être représentées chacune (39) par le sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres : nous aurons donc encore, P:Q:S :: sin. QAS:sin. SAR:sin. QAR.

III.

Si les deux cordons AQ, AS, au lieu d'être tirés par les deux puissances Q et S, étoient attachés aux deux points fixes Q et S (Fig. 50), alors dans les suites qui précédent, Q et S exprimeroient les pressions que supportent les appuis Q et S dans les directions QA, SA.

Corollaire.

122. De la suite de proportionnelles P:Q:S :: sin. SAQ: sin. SAR:sin. QAR, il résulte que la corde QAS (Fig. 49)

formera toujours un angle en A, quelles que soient les forces Q et S qui la tendent. Car, tant que les trois puissances ont entre elles un rapport fini, les deux angles SAR, QAR, sont finis, et il y a un coude en A. Ce coude ne peut disparoître, à moins que la puissance P ne soit infiniment petite par rapport aux deux autres; ou, ce qui revient au même, à moins que la puissance P étant finie, les deux puissances Q et S ne soient infinies. On voit par-là que si une corde est attachée par ses extrémités à deux points fixes Q et S (Fig. 51), et que l'angle QAS soit fort obtus, une très petite force P produira de très grandes tensions aux deux parties AQ, AS.

Remarque I.

123. Dans trois cordons AP, AQ, AS (Fig. 49), ainsi assemblés à un même nœud A, et en équilibre, il y a six choses à considérer; savoir, leurs trois tensions, et les trois angles que leurs directions forment entre elles. Si, parmi ces six choses, on en connoît trois, on déterminera les trois autres, ou par des opérations graphiques, ou par le calcul trigonométrique. Par exemple, si on donne la puissance P et les deux angles QAR, SAR, qu'elle forme avec les deux puissances Q et S, il s'agira de construire, ou de résoudre un triangle ABD, dans lequel on connoît le côté AD, l'angle BAD, et l'angle ADB égal à l'angle connu CAD. Si on donne les quantités des trois forces P, Q, S, il faudra faire, ou calculer un triangle ABD, dans lequel on connoît les trois côtés. Si on ne donne que les trois angles formés par les directions des trois puissances, on ne pourra déterminer que les rapports des trois puissances; quand ce rapport sera trouvé, il faudra se donner la quantité de l'une des puissances, pour trouver celles des deux autres, etc. On voit que tous ces problèmes se réduisent à des recherches de pure géométrie.

Comme, dans tous les cas, les trois forces P, A, S, sont

représentées par les trois côtés d'un triangle, et que, dans tout triangle, chaque côté est toujours moindre que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence; on voit que si on donne les forces, il faut qu'elles satisfassent à cette condition.

REMARQUE II.

124. LE nœud A étant supposé fixe, les angles QAR, SAR, peuvent être égaux ou inégaux; mais si le nœud A étoit *coulant*, ces deux angles seroient nécessairement égaux. Car il est évident que, dans ce dernier cas, le nœud doit descendre jusqu'à ce que la puissance P soit dirigée de la même maniere par rapport aux deux puissances Q et S, c'est-à-dire jusqu'à ce que la direction PAR de la puissance P divise en deux parties égales l'angle QAS, et que les deux puissances Q et S deviennent égales.

PROPOSITION II. PROBLÊME.

125. LA *corde* QAS (Fig. 52), *de longueur donnée, étant attachée aux deux points fixes* Q *et* S, *placés comme on voudra par rapport à l'horizon, trouver la position d'équilibre que doit prendre la lanterne ou le poids donné* P *attaché à l'extrémité du cordon* AP, A *étant un nœud coulant.*

Menez par le point Q l'horizontale QK, et par le point S la verticale OSH, qui rencontre en H le prolongement de QA. Le nœud A étant coulant, les deux angles QAD, SAD, seront égaux. D'un autre côté, les deux angles QAD, QHS, sont égaux; et les deux angles SAD, ASH sont égaux. Donc les deux angles AHS, ASH, sont égaux; de sorte que le triangle SAH est isocele, ou $AS = AH$. Or, dans le triangle rectangle QOH, on connoît l'hypoténuse QH, puisque $QH = QA + AH = QA + AS$, longueur donnée de la corde; on connoît le côté QO par la position donnée des points Q et S. Donc on trouvera, par la trigo-

nométrie, l'angle QHS ou AHS. On connoîtra aussi chacun des angles QAD, SAD, et les parties QA, AS de la corde.

La position du nœud A peut être déterminée par une construction graphique fort simple. Car, si du point Q, comme centre, avec un rayon QH = QA + AS, on décrit un arc qui coupe OSH en H; qu'ensuite ayant fait l'angle OSK = l'angle QHO, on prolonge la droite KS jusqu'à ce qu'elle rencontre QH au point A : ce point sera celui qu'on demande.

Connoissant le poids P, ou la tension du cordon AP, on connoîtra les tensions Q et S des cordons AQ, AS, au moyen de la suite de proportionnelles, P:Q:S :. sin. QAS : sin. SAD : sin. QAD.

PROPOSITION III. PROBLÊME.

126. DÉTERMINER *l'effet qu'on doit attendre d'une machine funiculaire à trois cordons.*

Que le nœud A (Fig. 49) soit fixe ou coulant, on voit que P représentant le fardeau que les deux puissances Q et S soutiennent, ce fardeau est moindre que la somme des deux puissances Q et S. Cela arrivera toujours, tant que les directions des cordons concourront en un même point, ou formeront entre elles des angles finis. Mais supposons que les deux cordons QA, SB (Fig. 53), deviennent paralleles : d'abord j'observe qu'ils seront nécessairement verticaux, ou paralleles à la direction du fardeau P, ou en général de la résistance à vaincre : car leurs tensions auront (45) une résultante qui leur sera parallele ; et comme, d'un autre côté, cette résultante doit être égale et directement opposée à la pesanteur du fardeau (Ax. II), il est clair que les trois directions QA, SB, PX, seront paralleles. Puisqu'on a donc alors P = Q + S, il s'ensuit que le rapport du poids à la somme des deux puissances Q et S est le plus grand qu'il est possible. Ainsi la disposition la plus avantageuse qu'on puisse donner à deux cordons pour faire équilibre à la plus

grande résistance possible, est de rendre les directions de ces cordons paralleles à celle de la résistance.

Mais est-il question de faire monter le poids P dans la même hypothese du parallélisme des cordons ? alors le poids montera avec une vîtesse qui ne sera que la moitié de celle de la puissance. Car, de quelque maniere que le poids soit soulevé dans le cas présent, nous pouvons concevoir qu'il est appliqué à une roue ou *poulie* O (Fig. 54) mobile sur son centre, et embrassée par une corde dont les parties BS, AQ, sont paralleles, et qui est attachée par un bout au point fixe S, tandis que la puissance Q tire l'autre bout. Or, si l'on mene les horizontales AB, *ab*, et qu'on suppose, par exemple, que le poids ait été élevé suivant la verticale de la quantité O*p*; il est clair qu'il faudra pour cela que les cordons SB, QA, se soient accourcis des quantités B*b*, A*a*, égales chacune à O*p*. Ainsi le point S étant supposé fixe, la puissance Q aura parcouru un espace $= 2\mathrm{O}p$, tandis que le poids a parcouru le simple espace O*p*. Donc le poids marchera deux fois moins vîte que la puissance; ou, ce qui revient au même, le poids mettra deux fois plus de temps que la puissance à parcourir un certain espace. Si donc on gagne d'un côté, en ce que la puissance n'est que la moitié du poids, on perd, d'un autre côté, en ce que le poids marche deux fois plus lentement, ou consume deux fois plus de temps que la puissance.

On voit, par une raison contraire, qu'en regardant P comme la puissance, Q comme la résistance à vaincre, on perdroit en force ce qu'on gagneroit en temps.

Lorsque les trois cordons concourent en un même point, on gagne moins en force, mais on perd moins en temps : et réciproquement.

PROPOSITION IV. PROBLÊME.

127. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre d'une machine funiculaire, composée d'un nombre quelconque de nœuds fixes, dont chacun assemble trois cordons.*

Je vais rendre ce problême de deux manieres ; l'une tirée immédiatement des principes de la composition et décomposition des forces, l'autre tirée aussi des mêmes principes, mais sous une forme particuliere et commode pour trouver facilement la figure d'une corde pesante, comme on le verra.

SOLUTION I.

SOIT la corde ABCDE (Fig. 55), attachée à deux points fixes A et E, et garnie de tant de nœuds fixes B, C, D, qu'on voudra. Supposons qu'à chaque nœud soient appliqués trois cordons, et que les cordons BP, CQ, DS, soient tirés par les puissances P, Q, S, dirigées dans le plan de la corde, de maniere que tout le système soit en équilibre.

1°. Il est clair que la résultante des tensions des deux cordons BA, BP, doit être égale et directement opposée à la tension du cordon BC. Ainsi, ayant prolongé CB vers *c*, et ayant fait le parallélogramme B*acp*, dont les côtés B*a*, B*p*, tombent sur BA et BP; si l'on nomme A et K les tensions des cordons BA, BC, on aura (121) cette suite de rapports égaux, K:A:P :: B*c*:B*a*:B*p* ou *ac*.

2°. La résultante des tensions des deux cordons CD, CQ, doit être égale et directement opposée à la tension du cordon BC. Prolongeant donc BC vers *c'* de la quantité C*c'* = B*c*; faisant le parallélogramme C*dc'q*, dont les côtés C*d*, C*q*, tombent sur CD et sur CQ; nommant H la tension du cordon CD : on aura cette seconde suite de rapports égaux, K:H:Q :: C*c'* ou B*c*:C*d*:C*q* ou *dc'*.

3°. La résultante des tensions des deux cordons DE, DS, doit être égale et directement opposée à la tension du cordon CD. Je prolonge donc CD vers *d'* de la quantité D*d'* = C*d*; je forme le parallélogramme D*ed's*, dont les côtés D*e*, D*s* tombent sur les côtés DE, DS; et je nomme E la tension du cordon DE : on aura cette troisieme suite de rapports égaux, H:E:S :: D*d'* ou C*d*:D*e*:D*s* ou *ed'*.

On continueroit de raisonner de même, s'il y avoit un plus grand nombre de nœuds à la corde.

Cela posé, on observera que, dans les deux premieres suites, la force K est exprimée par la même ligne Bc, et que, dans la seconde et la troisieme suite, la force H est exprimée par la même ligne Cd. Il regne donc le même rapport dans les trois suites; et on peut par conséquent en tirer celle-ci, $A:K:H:E:P:Q:S :: Ba:Bc:Cd:De:Bp:Cq:Ds$.

REMARQUE I.

128. CETTE maniere d'exprimer les rapports des forces A, K, H, E, P, Q, S, suppose des constructions graphiques, toujours longues et sujettes à erreur. Il est plus commode et plus exact dans la pratique d'exprimer ces rapports par le moyen de sinus d'angles donnés immédiatement par la figure de la corde. Or il est clair, par ce qui précede, qu'on a ces suites de proportionnelles :

$$K:A:P::\sin.\ ABP:\sin.\ CBP:\sin.\ ABC,$$
$$K:H:Q::\sin.\ DCQ:\sin.\ BCQ:\sin.\ BCD,$$
$$H:E:S::\sin.\ EDS:\sin.\ CDS:\sin.\ CDE.$$

Comme d'une suite à l'autre il y a une quantité commune, rien n'est plus facile que de comparer ensemble deux quelconques des forces proposées. Par exemple, veut-on comparer A avec H, on formera ces deux proportions,

$$A:K::\sin.\ CBP:\sin.\ ABP,$$
$$K:H::\sin.\ DCQ:\sin.\ BCQ,$$

lesquelles étant multipliées par ordre, nous donnent,

$$A:H::\sin.\ CBP \times \sin.\ DCQ:\sin.\ ABP \times \sin.\ BCQ.$$

Veut-on comparer A avec E, on multipliera la proportion qu'on vient de trouver par celle-ci,

$$H:E::\sin.\ EDS:\sin.\ CDS.$$

et on aura, $A:E::\sin.\ CBP \times \sin.\ DCQ \times \sin.\ EDS: \sin.\ ABP \times \sin.\ BCQ \times \sin.\ CDS.$

6.

Même procédé pour toutes les autres comparaisons analogues.

REMARQUE II.

129. Si les nœuds B, C, D, étant toujours fixes, il arrivoit que les directions des puissances P, Q, S, partageassent en deux parties égales chacun des angles ABC, BCD, CDE du polygone ; ou bien si les nœuds étoient coulants, et qu'en conséquence les directions des puissances partageassent *nécessairement* en deux parties égales les mêmes angles : dans l'un et l'autre cas, toutes les parties AB, BC, CD, DE de la corde seroient également tendues. Car alors sin. CBP = sin. ABP, sin. DCQ = sin. BCQ, sin. EDS = sin. CDS. Donc aussi, A = K = H = E.

A l'égard des rapports des puissances P, Q, S, à chacune de ces tensions égales, que je désigne par la lettre A, ils se trouveroient par les proportions :

$$P : A :: \sin. ABC : \sin. \tfrac{1}{2} ABC,$$
$$Q : A :: \sin. BCD : \sin. \tfrac{1}{2} BCD,$$
$$S : A :: \sin. CDE : \sin. \tfrac{1}{2} CDE.$$

SOLUTION II.

130. SOIT d'abord ABCDE (Fig. 56) une corde sans pesanteur, attachée aux points fixes A, E, garnie de nœuds fixes B, C, D, auxquels sont appliquées les puissances P, Q, S, toutes dirigées dans un même plan, qui est celui du polygone funiculaire. Il est évident que le cordon BC est également tendu dans le sens CB et dans le sens BC. Donc la résultante des tensions des deux cordons BA, BP, est égale et directement opposée à la résultante des tensions des deux cordons CD, CQ. Ainsi les tensions des quatre cordons BA, BP, CD, CQ, sont quatre forces en équilibre. Or, ces quatre forces étant en équilibre, nous pouvons les

combiner autrement, et dire encore que la résultante des tensions des deux cordons BP, CQ, est égale et directement opposée à la résultante des tensions des deux cordons BA, CD. Mais la premiere de ces deux résultantes passe par le point de concours T des deux cordons PB, QC prolongés ; et la seconde passe par le point de concours F des deux cordons AB, DC, aussi prolongés. Donc ces deux résultantes tombent sur la ligne TF ; l'une tire dans le sens TF, l'autre dans le sens FT. Donc, en nommant Z chacune de ces résultantes, A et H, les tensions des cordons BA, CD ; on aura (121) ces deux suites de proportionnelles,

Z:A:H :: sin. AFD : sin. DFT : sin. AFT,
Z:P:Q :: sin. PTQ : sin. QTZ : sin. PTZ.

Substituons à la place des deux puissances P et Q leur résultante Z. Au lieu de la corde ABCDE, nous en aurons une seconde ABFDE aux angles F et D, de laquelle seront appliquées les deux puissances Z et S ; et en raisonnant pour cette corde comme pour la premiere, nous verrons que la résultante des tensions des deux cordons FZ, DS, doit être égale et directement opposée à la résultante des tensions des deux cordons FA, DE. La premiere résultante passe par le point de concours V des deux cordons ZF, SD ; la seconde passe par le point de concours O des deux cordons AF, ED. Ainsi elles tombent l'une et l'autre sur la ligne VO ; l'une tire dans le sens VO, l'autre dans le sens OV. Nommons R chacune de ces résultantes, E la tension du cordon DE ; et considérons que la tension du cordon AF est la même que celle de AB, que nous avons déja nommée A : on aura ces deux suites de proportionnelles,

R:A:E :: sin. AOE : sin. EOV : sin. AOV,
R:Z:S :: sin. ZVS : sin. SVR : sin. ZVR.

On continueroit à raisonner de même, s'il y avoit un plus grand nombre de nœuds.

Quant à la tension du cordon BC, dont nous n'avons pas

encore parlé ; si on la nomme K, il est clair qu'on aura ; K : A : P :: sin. ABP : sin. CBP : sin. ABC.

Par le moyen de ces différentes suites de proportionnelles, on pourra comparer ensemble, deux à deux, les différentes forces A, K, H, E, P, Q, S, Z, R.

COROLLAIRE. I.

131. SUPPOSONS que, tout restant d'ailleurs le même, les puissances P, Q, S, deviennent des poids (Fig. 57), et que par conséquent leurs directions soient verticales et paralleles. La résultante R deviendra verticale, passera par le centre de gravité du systême des poids P, Q, S, et sera égale à leur somme P+Q+S. On aura donc, P+Q+S : A : E :: sin. AOE : sin. EOV : sin. AOV. C'est-à-dire que *la somme des poids attachés à la corde, est à la tension de l'un des cordons extrêmes, comme le sinus de l'angle formé par ces deux cordons, est au sinus de l'angle formé par l'autre cordon et par la verticale.*

On a aussi, Z : A : H :: sin. AFD : sin. CFT : sin. AFT. D'où il suit qu'en regardant la corde comme attachée fixement en D, et faisant abstraction de la puissance S et du cordon DE, cette suite de proportionnelles donne la même conclusion que la précédente.

COROLLAIRE II.

132. LA même hypothese subsistant toujours, et considérant qu'on a en général,

A : K :: sin. CBP : sin. ABP,
A : H :: sin. CFT : sin. AFT,
A : E :: sin. EOV : sin. AOV ;

nous verrons d'abord que la tension A est à chacune des autres tensions K, H, E, comme le sinus de l'angle que l'un des cordons BC, CD, DE, fait avec la verticale, est au

sinus de l'angle que fait le cordon AB aussi avec la verticale.
Multipliant par ordre les deux proportions,

K:A :: sin. ABP : sin. CBP,
A:H :: sin. CFT : sin. AFT;

et observant que sin. ABP = sin. AFT, on aura,

K:H :: sin. CFT : sin. CBP.

De même, multipliant par ordre les deux proportions,

K:A :: sin. ABP : sin. CBP,
A:E :: sin. EOV : sin. AOV;

et observant que sin. ABP = sin. AOV, on aura,

K:E :: sin. EOV : sin. CBP.

Enfin, multipliant par ordre les deux proportions,

H:A :: sin. AFT : sin. CFT,
A:E :: sin. EOV : sin. AOV;

et observant que sin. AFT = sin. AOV, on aura,

H:E :: sin. EOV : sin. CFT.

Il résulte de toutes ces proportions que *les tensions de deux côtés quelconques d'un polygone funiculaire* ABCDE *chargé de poids, sont entre elles en raison inverse des sinus des angles que ces côtés forment avec la verticale.*

COROLLAIRE III.

133. Je suppose maintenant que ABCDE (Fig. 58) soit une corde pesante uniformément ou non, attachée aux deux points fixes A et E, laquelle, en vertu de sa seule pesanteur, prend une certaine courbure. Il est clair qu'on pourra regarder cette corde comme un polygone d'une infinité de côtés, chargé de poids dans tous ses points. Par conséquent, si l'on mene, suivant les directions des côtés extrêmes de ce polygone, les tangentes AO, EO, qui se rencontrent en O ; qu'ensuite ayant tiré les verticales OV, AX, EY, on nomme R le poids total de la corde, A et E, les charges des crochets A et E, ou les tensions de la corde

dans les sens AO, EO : on aura (131), R:A:E :: sin. AOE : sin. OEY : sin. OAX.

De même, si par un point quelconque D de la corde on mene la tangente DF, et qu'on éleve la verticale FT, on aura (en nommant Z le poids de la partie ABCD de la corde, D la tension de cette corde en D), Z:A:D :: sin. AFD : sin. DFT : sin. FAX.

Si l'on mene encore une autre tangente quelconque BM, qui rencontre DF en M, et qu'ayant élevé la verticale MN, on nomme K le poids de la partie BCD, B la tension de la corde en B, on aura, K : B : D :: sin. BMD : sin. DMN : sin. BMN.

La courbure de la corde est donc toujours telle que *le poids de cette corde, ou de l'une quelconque de ses parties, étant proportionnel au sinus de l'angle que forment entre elles les tangentes menées par les extrémités de la corde, ou de sa partie; les tensions, suivant les directions des tangentes, sont réciproquement proportionnelles aux sinus des angles que ces tangentes forment avec la verticale.*

SCHOLIE.

134. REPRENONS l'hypothese de l'article 131. La somme P + Q + S (Fig. 57) de tous les poids attachés à la corde, ou leur résultante R, peut être censée agir suivant la verticale OR; et on peut considérer le point O comme le nœud d'une machine funiculaire qui assemble trois cordons OR, OA, OE, tirés par les trois puissances R, A, E. Tout ce qu'on a dit dans l'article 126 s'applique donc ici. On voit que, pour rendre le poids R le plus grand qu'il est possible par rapport à la puissance qui peut lui faire équilibre, il faut rendre les cordons OA, OE, paralleles à la direction du poids. Mais si cette disposition est la plus avantageuse de toutes pour le simple équilibre, elle a un effet opposé pour le mouvement, car elle fait perdre en temps ce qu'on gagne en force. On verra ci-dessous l'usage des poulies pour

rendre paralleles entre eux, et à la direction du poids, plusieurs cordons employés à soutenir ce poids.

PROPOSITION V. PROBLÈME.

135. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre d'un polygone funiculaire régulier, dont chaque nœud assemble trois cordons.*

Soit ABCDEF (Fig. 59) un polygone funiculaire régulier, aux angles duquel sont appliquées les puissances P, Q, R, etc., agissantes du centre à la circonférence, ou suivant les rayons OA, OB, OC, etc. du cercle circonscrit, et en équilibre entre elles. Prenez arbitrairement Ay sur la direction de la puissance P, et achevez le parallélogramme $Axyz$: la puissance P, la tension du cordon AB, et celle du cordon AF, seront proportionnelles aux trois lignes Ay, Ax, xy, ou (à cause des deux triangles isosceles semblables xAy, OAB), aux trois lignes AB, OB, AO; de même, la puissance Q et les tensions des deux cordons BA, BC, sont proportionnelles aux trois lignes BC, OB, OC; la puissance R et les tensions des deux cordons CB, CD, sont proportionnelles aux trois lignes CD, OC, OD, etc. Et comme il regne la même raison dans ces suites de proportionnelles, puisque d'un nœud à l'autre du polygone funiculaire, il y a un côté qui est également tendu dans les deux sens opposés, et dont la tension est exprimée par le rayon du cercle circonscrit au polygone : on voit, 1°. que *toutes les puissances* P, Q, R, etc., *sont égales entre elles*, comme étant exprimées chacune par chacun des côtés égaux du polygone; 2°. que *tous les côtés du polygone sont également tendus*, la tension de chacun d'eux étant exprimée par le rayon du cercle ; 3°. que *la somme de toutes les puissances est à la tension de l'un des côtés du polygone, comme le contour du polygone est au rayon du cercle circonscrit.*

Lorsque le nombre des côtés du polygone augmente à l'infini, son contour se confond avec la circonférence du

cercle circonscrit ; et la tension de l'un de ses côtés est alors la tension de la circonférence en un point quelconque, suivant la direction de la tangente en ce point. Ainsi, *si à tous les points d'une circonférence de cercle flexible sont appliquées des puissances agissantes du centre à la circonférence, et en équilibre, toutes ces puissances sont égales : la circonférence est également tendue dans tous ses points ; et la somme de toutes les puissances est à chacune de ces tensions, comme la circonférence est au rayon.*

Ces principes s'appliquent à l'hydrostatique, pour trouver la pression d'un fluide contre les parois d'un vase cylindrique flexible, dont la base est horizontale.

Scholie général.

136. Voila à-peu-près tout ce qui regarde l'équilibre des machines funiculaires dont chaque nœud n'assemble pas plus de trois cordons. Il n'est pas plus difficile de déterminer celui des machines funiculaires dont les nœuds, ou du moins quelques uns, assemblent plus de trois cordons. La question se réduit, pour chaque nœud, à trouver les quantités et les directions de plusieurs forces qui concourent en un même point. La tension du cordon, qui fait la communication d'un nœud à l'autre, doit toujours être égale et directement opposée à chaque résultante des tensions de tous les autres cordons issus de chacun de ces deux nœuds. Par exemple (Fig. 60), la tension du cordon BC est égale et directement opposée à la résultante des tensions des cordons BA, BP, BZ, BV ; elle l'est aussi à la résultante des tensions des cordons CO, CQ, CF. Ainsi de suite pour les autres nœuds.

Remarque.

137. Lorsqu'un nœud fixe B (Fig. 61) assemble quatre cordons dirigés dans un même plan, et tirés par quatre puis-

sances P, Q, S, Z, il ne suffit pas de connoître les positions de ces cordons pour trouver les rapports de leurs tensions, ni réciproquement les rapports des tensions, pour trouver la position des cordons : car, en vertu de l'équilibre, l'une des puissances, par exemple Z, doit être égale et directement opposée à la résultante des trois autres P, Q, S. Ayant donc pris sur ZB prolongée le point O à volonté, menons à volonté la droite OC, qui rencontre en C la direction de la puissance S, et achevons le parallélogramme OCBM; par le point M, menons parallèlement aux directions des deux puissances P et Q, les droites MK, MG, pour avoir le parallélogramme BGMK. Il est clair (40) que la puissance Z étant exprimée par BE = BO, les puissances P, Q, S, sont exprimées par BG, BK, BC. Or, comme le point O demeurant le même, la droite OC a été menée arbitrairement; il est clair que si l'on prend un autre point C, les puissances P, Q, S, seront exprimées par d'autres parties de leurs directions. Il ne suffit donc pas de connoître les directions des quatre forces P, Q, S, Z, pour trouver les rapports de leurs quantités. Il n'est pas moins évident que les quantités ne suffisent pas pour faire trouver les directions; car, avec les lignes données BO, BC, on peut faire plusieurs parallélogrammes BCOM, tels que les côtés BM soient les diagonales de différents parallélogrammes BGMK, dont les côtés BG, BK, sont donnés.

Mais si les quatre puissances P, Q, S, Z (Fig. 62), ne sont pas dans un même plan, l'indétermination du premier cas cesse; celle du second subsiste. En effet, menons par les directions des deux puissances P et Q le plan BGMK; par les directions des deux puissances P et S, le plan BGNC; par les directions des deux puissances Q et S, le plan BKVC; et par un point quelconque O de ZB prolongée, les trois plans ONCV, OMKV, ONGM, paralleles chacun à chacun des trois précédents. On formera par-là un parallélepipede dans lequel le point O étant donné, les points C, G, K, ne sont plus arbitraires; en sorte que la puissance Z étant

exprimée par $BE = BO$, les puissances P, Q, S, sont exprimées par les lignes fixes et déterminées BG, BK, BC. Les directions des puissances suffisent donc alors pour faire trouver les rapports de leurs quantités. Mais la proposition inverse n'est pas vraie; car il est évident qu'avec les lignes données BO, BC, on peut faire plusieurs parallélogrammes BCOM, tels que les côtés BM soient les diagonales d'autres parallélogrammes BGMK, dont les côtés BG, BK, sont donnés, et lesquels servent de bases à autant de parallélipipedes, suivant les arêtes et les diagonales, desquels, les puissances seroient dirigées.

On voit par là qu'on peut assembler quatre cordons à un même nœud de plusieurs manieres, telles qu'il y ait équilibre. Les conditions de chaque problême déterminent la combinaison particuliere qui doit avoir lieu. En voici un exemple qui mérite d'être examiné, parcequ'il a son application dans l'hydrostatique, pour trouver la figure d'un vase flexible, pesant et chargé de liqueur.

Proposition VI. Problême.

138. Déterminer *les conditions de l'équilibre d'un polygone funiculaire vertical, à chaque angle duquel sont appliquées deux sortes de forces; les unes verticales, les autres qui divisent les angles du polygone en deux parties égales.*

Soit une corde ABCDE (Fig. 63) attachée à deux points fixes A et E, et à chacun des angles ou nœuds fixes B, C, D, de laquelle sont appliquées deux puissances P, S; Q, T; R, V; toutes dirigées dans le même plan, mais dont les unes S, T, V, sont verticales, et les autres P, Q, R, divisent en deux parties égales chacun des angles de la corde. Je décompose la force S, représentée par la partie BF de sa direction, en deux autres BG, BH; l'une dirigée suivant BP, l'autre suivant AB. Il est clair (121) qu'on aura, Force BG $= S \times \frac{\sin. HBS}{\sin. HBP} = S \times \frac{\sin. ABs}{\sin. ABp}$; Force BH $= S \times \frac{\sin. PBS}{\sin. HBP}$ $= S \times \frac{\sin. sBp}{\sin. ABp}$.

Il n'est pas moins évident que l'équilibre du nœud B est le même que si, retranchant de la tension a du cordon AB la force $S \times \frac{\sin.\ sBp}{\sin.\ ABp}$, et ajoutant à la tension P du cordon BP la force $S \times \frac{\sin.\ ABs}{\sin.\ ABp}$, ce nœud assembloit simplement trois cordons BA, BP, BC, dont le premier fût tiré, dans le sens BA, par la force $a - S \times \frac{\sin.\ sBp}{\sin.\ ABp}$; le second dans le sens BP, par la force $P + S \times \frac{\sin.\ ABs}{\sin.\ ABp}$; le troisieme, dans le sens BC, par la force b, qui en exprime la tension. Comparons la premiere force avec la seconde, nous aurons (121), $a - S \times \frac{\sin.\ sBp}{\sin.\ ABp} : P + S \times \frac{\sin.\ ABs}{\sin.\ ABp} ::$ sin. PBC: sin. ABC :: sin. CBp, ou sin. ABp : sin. 2ABp; et par conséquent $a = \frac{P \times \sin.\ ABp}{\sin.\ 2ABp} + S \times \left(\frac{\sin.\ sBp}{\sin.\ ABp} + \frac{\sin.\ ABs}{\sin.\ 2ABp}\right)$.

Le multiplicateur de S peut être simplifié, ou écrit sous une autre forme. Car $\frac{\sin.\ sBp}{\sin.\ ABp} + \frac{\sin.\ ABs}{\sin.\ 2ABp} =$ . . . .
$\frac{\sin.\ (CBs - ABp)\ \sin.\ 2ABp + \sin.\ (2ABp - CBs)\ \sin.\ ABp}{\sin.\ ABp \times \sin.\ 2ABp}$. Or si, pour abréger, on nomme x et y les arcs qui, décrits avec le rayon 1, mesureroient respectivement les angles CBs, ABp; cette expression deviendra $\frac{\sin.(x-y)\sin.\ 2y + \sin.(2y-x)\sin.\ y}{\sin.\ y\ \sin.\ 2y}$; ou bien, $\frac{\sin.\ x \cos.\ y\ \sin.\ 2y - \cos.\ 2y\ \sin.\ y\ \sin.\ x}{\sin.\ y\ \sin.\ 2y}$, en mettant pour $\sin.(x-y)$ sa valeur $\sin.\ x \cos.\ y - \cos.\ x \sin.\ y$, pour $\sin.\ (2y - x)$ sa valeur $\sin.\ 2y \cos.\ x - \sin.\ x \cos.\ 2y$, et effaçant les termes qui se détruisent. La même expression devient encore $\frac{\sin.\ x\ (\sin.\ 2y \cos.\ y - \cos.\ 2y \sin.\ y)}{\sin.\ y\ \sin.\ 2y}$; ou bien, $\frac{\sin.\ x}{\sin.\ 2y}$, en mettant pour $\sin.\ 2y \cos.\ y - \cos.\ 2y \sin.\ y$ sa valeur $\sin.\ (2y - y) = \sin.\ y$, et divisant le numérateur

et le dénominateur par sin. y. Ainsi on aura, $a = \ldots \frac{P \times \text{sin. } ABp + S \times \text{sin. } CBs}{\text{sin. } 2ABp}$.

Comparons la force $P + S \times \frac{\text{sin. } ABs}{\text{sin. } ABp}$ avec la force b, nous aurons (121), $P + S \times \frac{\text{sin. } ABs}{\text{sin. } ABp} : b ::$ sin. ABC ou sin. $2ABp$: sin. ABP ou sin. ABp; et par conséquent $b = \frac{P \times \text{sin. } ABp + S \times \text{sin. } AB}{\text{sin. } 2ABp}$.

Comme le cordon BC est également tendu dans le sens BC et dans le sens CB, on trouvera encore, en raisonnant pour le nœud C, comme on a fait pour le nœud B, $b = \ldots \frac{Q \times \text{sin. } BCq + T \times \text{sin. } DCt}{\text{sin. } 2BCq}$. Égalant entre elles les deux valeurs de b, on aura, $\frac{P.\ \text{sin. } ABp + S.\ \text{sin. } ABs}{\text{sin. } 2ABp} = \frac{Q\ \text{sin. } BCq + T\ \text{sin. } DCt}{\text{sin. } 2BCq}$.

On trouve, toujours de même, que la tension c du cordon CD est donnée par chacune des équations, $c = \ldots \frac{Q \times \text{sin. } BCq + T \times \text{sin. } BCt}{\text{sin. } 2BCq}$; $c = \frac{R \times \text{sin. } CDr + V \times \text{sin. } EDu}{\text{sin. } 2CDr}$. Égalant les deux valeurs de c, on aura, $\frac{Q.\ \text{sin. } BCq + T.\ \text{sin. } BCt}{\text{sin. } 2BCq} = \frac{R \times \text{sin. } CDr + V \times \text{sin. } EDu}{\text{sin. } 2CDr}$.

Enfin la tension d du cordon DE est donnée par l'équation $d = \frac{R \times \text{sin. } CDr + V.\ \text{sin. } CDu}{\text{sin. } 2CDr}$.

On continueroit à procéder de même, si la corde avoit un plus grand nombre d'angles.

Ces différentes équations contiennent les relations que doivent avoir entre elles les forces P, Q, R, S, T, V, et les tensions a, b, c, d, des parties de la corde, pour qu'il y ait équilibre. Lorsque le nombre des angles B, C, D, etc. augmente à l'infini, la corde devient une courbe, dont on trouvera facilement l'équation, quand on connoîtra la loi des forces P, Q, R, S, T, V, etc., appliquées à ces angles.

CONCLUSION.

139. Si un nœud d'une machine funiculaire assembloit plus de quatre cordons, le nombre des combinaisons d'équilibre augmenteroit encore. Le problême ne seroit donc déterminé que quand il contiendroit assez de *données* pour mener à la connoissance des tensions et des directions des cordons. Cela se réduit, dans tous les cas, à une simple recherche de géométrie. Ainsi je ne m'y arrêterai pas davantage.

SECTION IV.

Du Levier, et de quelques autres Machines qui s'y rapportent.

---

140. Le *levier* est une verge inflexible, droite ou courbe, qui sert à élever des poids, ou en général à mettre des puissances en équilibre, au moyen d'un appui fixe sur lequel il est mobile circulairement. Voyez les Figures 64, 65, 66, 67.

141. Comme l'usage le plus ordinaire du levier est de soutenir un poids, à l'aide d'une puissance et d'un appui, les différentes situations que le poids et la puissance peuvent avoir par rapport à l'appui, ont fait imaginer trois especes différentes de levier.

142. On appelle *levier de la premiere espece* celui où l'appui R (Fig. 64, 65) est placé entre le poids et la puissance. Le poids et la puissance tirent dans le même sens; et l'appui est placé au-dessous du levier.

143. Le *levier de la seconde espece* est celui où le poids P (Fig. 66) est placé entre l'appui R et la puissance Q. Le poids et la puissance tirent en sens contraires; et l'appui est encore placé au-dessous du levier.

144. Enfin, dans le *levier de la troisieme espece*, la puissance Q (Fig. 67) est placée entre le poids et l'appui. La puissance et le poids tirent en sens contraires; et l'appui est placé au-dessus du levier.

145. En regardant la résistance de l'appui comme une force appliquée au levier, on voit que la recherche des lois de l'équilibre dans cette machine consiste à trouver les rapports de plusieurs puissances qui, en agissant sur une verge inflexible, se contrebalancent mutuellement. On comptera parmi ces puissances la pesanteur même du levier, lorsqu'elle sera assez grande pour qu'on ne puisse pas la négliger sans craindre d'erreur sensible.

Proposition I. Problème.

146. Déterminer *les conditions de l'équilibre dans les trois especes de leviers.*

Nous négligeons ici la pesanteur du levier : le cas où il faudroit y avoir égard appartient au problême suivant.

I.

Soient dans les *Figures* 68, 69, 70, qui sont relatives aux trois especes de leviers, les trois puissances P, Q, S, en équilibre. Cet équilibre ne peut avoir lieu qu'autant que deux d'entre elles se réduisent à une seule force égale et directement opposée (Ax. II) à la troisieme. Or (32) deux forces et leur résultante sont toujours dans un même plan, et de plus concourent en un même point, ou bien sont paralleles. Donc les trois forces proposées P, Q, S, sont dans un même plan, et concourent en un même point, ou bien sont paralleles.

II.

SUPPOSONS que les directions des trois puissances concourent au point O. D'un point R pris arbitrairement sur la direction de la puissance S, soient menées parallèlement aux directions des puissances P et Q les droites RN, RM, pour avoir le parallélogramme OMRN; et soit tirée la diagonale OR. On aura (34), P:Q:S :: OM:ON ou MR:OR; ou bien encore (39), P:Q:S :: sin. RON:sin. ROM:sin. MON.

On connoîtra donc les rapports des trois puissances P, Q, S, lorsque leurs directions seront données.

III.

EN considérant le point O comme le nœud d'une machine funiculaire, qui assemble trois cordons OP, OQ, OS, tirés par les trois puissances P, Q, S, il est clair qu'on peut proposer et résoudre, au sujet de ces puissances, les mêmes problêmes dont il a été parlé (123).

IV.

DU point R, toujours arbitraire, soient abaissées les perpendiculaires RE, RF, sur les directions des deux puissances P et Q. On aura (37 et 38), P:Q :: RF:RE; et P × RE = Q × RF.

V.

DONC, en supposant que le point R soit un appui qui fait maintenant la fonction de la puissance S, nous pouvons conclure que *deux puissances* P *et* Q, *appliquées dans un même plan à un levier, et en équilibre, sont entre elles en raison réciproque des perpendiculaires abaissées du point d'appui sur leurs directions*; et, ce qui en est la suite, que *ces deux puissances ont des moments égaux, par rapport au point d'appui.*

COROLLAIRE I.

147. La même conclusion a également lieu (44) pour le cas où les deux forces P et Q seroient paralleles (Fig. 71, 72, 73). Car le point d'appui est nécessairement placé dans tous les cas sur la direction de leur résultante ; et on a ici (46, 47), P:Q :: RF:RE, et par conséquent $P \times RE = Q \times RF$.

COROLLAIRE II.

148. Lorsque, les puissances étant paralleles, les points A, B, R, sont placés en ligne droite, on a aussi, par les mêmes articles 46, 47, P:Q :: RB:RA. Cela est d'ailleurs évident, puisque les triangles semblables RFB, REA, donnent, RF : RE :: RB : RA. On voit par-là que, *dans le levier droit, deux puissances paralleles, et en équilibre, sont entre elles en raison inverse des bras de ce levier.*

Cette proportion donne, $P \times RA = Q \times RB$; c'est-à-dire que *les produits des puissances, multipliées chacune par son bras de levier, sont égaux entre eux.*

REMARQUE I.

149. Il est à propos de remarquer que le point d'appui dans le levier étant destiné, dans tous les cas, à faire l'office d'une puissance égale et directement opposée à la résultante des deux puissances P et Q appliquées au levier, il doit résister dans le sens de cette force ; autrement il n'y auroit pas équilibre, quand même les deux forces P et Q seroient entre elles en raison réciproque des perpendiculaires abaissées de l'appui sur leurs directions. En effet, soit, par exemple, le levier AB (Fig. 74) droit et incliné, posé sur un appui courbe R, qui lui permet de glisser dans le sens de sa longueur ; et qu'à ce levier soient appliqués deux poids P et Q, tels que l'on ait, P:Q :: RF:RE :: RB:RA ; il n'y aura pas pour cela équilibre. Car la résultante des deux poids P et Q,

qui passe par le point R (45), et qui agit suivant la verticale Rr, se décompose en deux autres forces, dont l'une, dirigée suivant Rf, perpendiculaire à la courbure de l'appui, est détruite; l'autre, dirigée suivant Rg, tangente à l'appui, tend à faire glisser et fera glisser effectivement le levier, puisque rien ne s'oppose à son action. Il n'en sera pas ainsi, si, tout restant d'ailleurs le même, le levier est traversé par un axe ou boulon R (Fig. 75), et qu'il soit suspendu par un cordon MR; il demeurera en équilibre dans toutes les inclinaisons possibles, parceque dans tous les cas le boulon porte sur un point du levier, qui est placé dans la verticale MR, et que par conséquent la résultante des deux poids P et Q, qui passe par le point R, est nécessairement détruite par la résistance du cordon MR.

Remarque II.

150. Nous ferons encore une remarque à ce sujet. Si la direction de l'une des puissances n'étoit pas située dans le plan, suivant lequel le levier tend à tourner pour contrebalancer l'autre puissance, il faudroit décomposer la premiere force en deux autres; l'une perpendiculaire au plan de rotation, l'autre dirigée suivant ce plan, et n'avoir égard qu'à cette derniere. Soit, par exemple, ARB (Fig. 76) un levier situé avec le poids P, appliqué à l'une de ses extrémités, dans un plan vertical PARB; et qu'au point B soit appliquée une puissance Q, qui tire suivant la direction BI, oblique à ce plan. Que le levier soit traversé par un boulon R, horizontal et librement mobile sur ses extrémités, de maniere que le levier ait simplement liberté toute entiere de tourner circulairement dans le plan PARB. Par le point B, j'éleve perpendiculairement à ce plan la droite BG, et je fais passer, suivant BI et BG, un plan qui rencontre le précédent suivant BH. Ayant pris BI pour représenter la puissance Q, j'acheve le parallélogramme BGIH, afin de pouvoir substituer à la place de la force Q ou BI les deux forces BG, BH.

7.

La premiere de ces deux forces est détruite par la résistance du levier, auquel le boulon R ne permet aucun mouvement horizontal. La seconde BH est la seule qui tende à faire tourner le levier circulairement dans le plan PARB, et à soulever le poids P. Donc, si du point d'appui R on abaisse les perpendiculaires RE, RK, sur les directions du poids P, et de la force BH, il faudra, pour l'équilibre, qu'on ait l'équation $P \times RE = \text{Force } BH \times RK$. Si cette équation n'a pas lieu, le levier tournera autour de l'axe R, soit dans un sens, soit dans un autre; et il n'y aura pas équilibre.

Scholie.

151. Les trois especes de leviers ont des propriétés différentes, par rapport aux quantités de la puissance et du poids. Dans les deux premieres especes, la puissance peut faire équilibre à un poids plus grand qu'elle, tandis qu'au contraire, dans le levier de la troisieme espece, le poids est moindre que la puissance. Mais si l'on fait passer le levier du repos au mouvement, dans les deux premiers cas la puissance ira plus vîte que le poids, précisément dans le même rapport qu'elle est moindre que lui; et, dans le troisieme, la puissance ira moins vîte que le poids, dans le même rapport qu'elle est plus grande que lui. Car, dans tous les cas, les vîtesses de la puissance et du poids sont proportionnelles aux arcs semblables décrits dans le même temps, ou aux distances du point d'appui aux directions de la puissance et du poids. Ainsi, dans les deux premieres especes de leviers, on perd en temps ce qu'on gagne en force; et, dans la troisieme, on perd en force ce qu'on gagne en temps. Les circonstances particulieres où l'on se trouve déterminent le choix de l'espece de levier dont on a besoin, relativement à l'effet qu'on veut produire.

Proposition II. Problême.

152. Déterminer *les conditions de l'équilibre entre un nombre quelconque de puissances appliquées à un levier.*

Supposons un levier mobile circulairement autour d'un boulon, et auquel soient appliquées un nombre quelconque de puissances. Si toutes ces puissances n'étoient pas situées dans le plan de la rotation, que je suppose fixe et inébranlable, il faudroit décomposer chaque puissance oblique à ce plan en deux autres; l'une qui y fût perpendiculaire, l'autre qui y fût dirigée, et n'avoir égard qu'à cette derniere. Je suppose, dans le cas présent, que ARB (Fig. 77), représente le levier proposé, lequel est mobile circulairement autour du boulon R, et soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces P, Q, S, T, V, toutes dirigées dans le plan de la rotation, mais dont les unes, Q, S, V, tendent à faire tourner le levier dans un sens, tandis que les autres, P, T, tendent à le faire tourner en sens contraire. Il s'agit de déterminer les conditions de l'équilibre entre toutes ces forces. Ce problème a déja été résolu (80). Mais nous allons en présenter ici la solution sous un point de vue un peu différent.

Imaginons que les deux forces Q, S, soient réduites à une force unique, que je suppose dirigée suivant KX, et que je nomme K; que les deux forces K et T soient réduites à une force unique, que je suppose dirigée suivant YG, et que je nomme G. De même, réduisons les deux forces P et V à une force unique, que je suppose dirigée suivant DZ, et que je nomme D. Par-là, nous n'aurons plus que deux forces G et D, qui se font équilibre autour du point d'appui R. Menons de ce point sur les directions des forces Q, S, K, G, T, P, V, D, les perpendiculaires RF, RM, RX, RY, RL, RE, RI, RZ. Cela posé, les deux résultantes finales G et D ayant pour résultante une force qui passe nécessairement par le point R, puisqu'elles sont en équilibre autour de ce point; on a (38), $G \times RY = D \times RZ$. Or (57),

1°. G étant la résultante des deux forces K et T, on a, $G \times RY = K \times RX - T \times RL$; et K étant la résultante des deux forces Q et S, on a, $K \times RX = Q \times RF + S \times RM$.

Ainsi on aura, $G \times RY = Q \times RF + S \times RM - T \times RL$.

2°. D étant la résultante des deux puissances P et V, on a, $D \times RZ = P \times RE - V \times RI$.

Par conséquent, à la place de l'équation $G \times RY = D \times RZ$, on aura, $Q \times RF + S \times RM - T \times RL = P \times RE - V \times RI$; ou bien $Q \times RF + S \times RM + V \times RI = P \times RE + T \times RL$.

D'où l'on doit conclure en général que *la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un sens autour du point d'appui, est égale à la somme des moments des forces qui tendent à le faire tourner en sens contraire autour du même point.*

Le moment de chaque force est, comme on voit, le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée du point d'appui sur sa direction.

Remarque I.

153. Lorsqu'un levier est pesant, et que sa pesanteur est assez considérable pour entrer en comparaison avec les autres forces, il faut la regarder comme une puissance appliquée au centre de gravité du levier, et dirigée verticalement. Par exemple, dans l'article précédent, la force S peut être le poids du levier, censé réuni à son centre de gravité H.

Remarque II.

154. Nous ferons, au sujet des leviers pesants, une autre remarque qui mérite attention. Qu'on ait un levier pesant, auquel soient appliqués un poids P et une puissance Q (Fig. 64, 66, 67). Dans le levier de la premiere espece (Fig. 64), la pesanteur du levier contrariera ou favorisera la puissance Q, selon que le centre de gravité du levier tombera entre les points A et R, ou entre les points R et B. Dans le levier de la seconde espece (Fig. 66), le

poids de ce levier contrarie toujours la puissance Q : si, pour augmenter le moment de cette puissance, on éloigne le point B du point R, ou qu'on augmente la longueur du levier, on augmentera aussi le poids du levier ; et il pourra arriver qu'on perde par la seconde augmentation ce qu'on gagne ou même plus qu'on ne gagne par la premiere. Il y a donc dans ce levier une longueur propre à rendre le moment de la puissance le plus grand qu'il est possible, par rapport au moment de la résistance totale qu'elle est obligée de vaincre. Cette longueur se trouve par les méthodes ordinaires *de maximis et minimis*. Passé ce terme, on ne peut que perdre à augmenter la longueur du levier. Enfin, dans le levier de la troisieme espece (Fig. 67), le poids du levier contrarie encore la puissance; mais on voit qu'en supposant que la longueur RA et la grosseur du levier demeurent les mêmes, on ne peut que faire augmenter le moment de la puissance, en approchant le point B où elle est appliquée, du point d'application A du poids P.

Scholie général.

155. Il y a des cas où le levier n'est pas assujetti à tourner circulairement autour d'un point fixe, comme nous l'avons supposé dans tout ce qui précede. Supposons maintenant qu'on ait un levier auquel soient appliquées un nombre quelconque de forces, suivant des directions quelconques, et qui ait la liberté de pirouetter en tous sens autour d'un noyau sphérique : alors il faut décomposer les puissances en d'autres paralleles à trois lignes données de position ; et les conditions de l'équilibre se déterminent par le moyen des articles 86 et 87.

Le levier est d'usage dans la plupart des machines. Il peut être de bois, ou de fer, ou de toute autre matiere, selon l'objet auquel il est destiné. Il doit avoir dans chaque cas une grosseur et une résistance proportionnées à sa longueur, à la matiere dont il est fait, et aux efforts qu'il est

obligé de supporter. La détermination de cette grosseur est une question qui donne peu de prise à la théorie, et sur laquelle on doit sur-tout consulter l'expérience.

Equilibre des Ponts-levis.

156. Parmi les machines où il entre des leviers, les *ponts-levis* méritent d'autant plus d'être examinés ici avec quelque détail, que les ingénieurs sont souvent obligés d'en faire construire dans les places de guerre, et que la théorie de leur équilibre ne se trouve dans aucun livre de mécanique, du moins dans aucun de ceux qui sont venus à ma connoissance.

157. On voit dans la Figure 78 le profil d'un pont-levis, coupé par un plan vertical qui passe par son milieu, et qui le divise en deux parties parfaitement égales et semblables. Cette machine est composée d'un *tablier* exprimé par la droite AE, lequel est mobile autour de deux tourillons A, placés à ses extrémités; de deux longues pieces de bois, marquées au profil par la même ligne GM, lesquelles tournent autour de deux tourillons K, et dont les parties antérieures KG se nomment *fleches;* les parties postérieures KM se nomment *bascules.* Il y a des traverses de bois qui lient ensemble les deux bascules; et tout l'assemblage est censé ne faire qu'un seul et même corps. Deux *chaînes*, représentées par GN′E, joignent les fleches avec le tablier; elles le font monter, quand la bascule s'abaisse; et réciproquement, quand le tablier s'abaisse, la bascule monte.

Proposition III. Problème.

158. Déterminer *les conditions générales de l'équilibre d'un pont-levis.*

Imaginons que le pont-levis soit parvenu en montant dans une position quelconque; que T exprime le poids du tablier;

C, celui du système des deux chaînes; F, celui du système des deux fleches; et enfin B, celui du système des deux bascules et de leur assemblage. Tous ces poids T, C, F, B, doivent être censés agir suivant les verticales qui passent par leurs centres de gravité. Considérons les deux chaînes comme réunies en une seule GN'E; et de plus regardons d'abord cette chaîne comme une corde parfaitement flexible. Qu'on mene par ses extrémités les tangentes GN, EN; elles se rencontreront en un point N placé (133) sur la direction de la verticale CNP, qui passe par le centre de gravité de la chaîne GN'E. Nommons f et ϕ les tensions de la chaîne en G et E, suivant les directions des tangentes GN, EN; et des points d'appui A et K soient menées les perpendiculaires At, Ab, Kd, Kg, Ke, sur les directions des forces T, ϕ, f, F, B, respectivement.

Cela posé, il est clair que AE peut être considéré comme un levier isolé, auquel sont appliquées les deux puissances T, ϕ, en équilibre, et que par conséquent on aura (146) l'équation $T \times At = \phi \times Ab$.

De même, on peut considérer GKM comme un levier isolé auquel sont appliquées les trois forces f, F, B, en équilibre. Ainsi on aura (152), $f \times Kd + F \times Kg = B \times Ke$, ou $B \times Ke - F \times Kg = f \times Kd$.

Les tensions ϕ et f peuvent être chassées de ces équations, en considérant qu'on a (133), $\phi = \frac{C \times \text{sin. GNP}}{\text{sin. ENG}}$, $f = \frac{C \times \text{sin. ENP}}{\text{sin. ENG}}$, Nous aurons donc

$$T \times At = \frac{C \times \text{sin. GNP}}{\text{sin. ENG}} \times Ab;$$

$$B \times Ke - F \times Kg = \frac{C \times \text{sin. ENP}}{\text{sin. ENG}} \times Kd.$$

Voyons l'usage de ces équations pour la pratique.

I.

Comme la courbure des chaînes est ordinairement peu sensible, nous allons la négliger et supposer qu'elles se

confondent, au moins sensiblement, avec la droite GE. Alors les deux angles GNP, ENP, pourront être regardés comme suppléments l'un de l'autre, et comme ayant par conséquent le même sinus. On aura donc $\phi = f$, sensiblement. Donc, à cause de $\phi = \frac{T \times At}{Ab}$, et de $f = \frac{B \times Ke - F \times Kg}{Kd}$, on aura sensiblement, $\frac{T \times At}{Ab} = \frac{B \times Ke - F \times Kg}{Kd}$.

Nommons 1 le sinus total; et considérons que $At = AH \times \sin. AHT$; $Ab = AE \times \sin. AEG$, sensiblement; $Kd = KG \times \sin. KGE$, sensiblement; $Kg = KI \times \sin. KIF$; $Ke = KL \times \sin. KLB$; notre équation deviendra,

$$\frac{T \times AH \times \sin. AHT}{AE \times \sin. AEG} = \frac{B \times KL \times \sin. KLB - F \times KI \times \sin. KIF}{KG \times \sin. KGE}.$$

II.

On voit par cette derniere équation que les sinus des angles qu'elle renferme, variant d'une position du pont-levis à l'autre, suivant une loi qui dépend de l'espece particuliere du quadrilatere AEGK; cette espece ne peut pas être arbitraire, si l'on veut que les poids T, F, B, demeurant les mêmes, comme ils demeurent en effet, l'équilibre ait lieu dans toutes les positions possibles du pont-levis. Mais, en supposant que les côtés opposés du quadrilatere soient égaux deux à deux, c'est-à-dire qu'on ait AE = KG, AK = EG, et que par conséquent le quadrilatere conserve la figure parallélogrammique dans toutes les situations possibles, l'équilibre en question aura lieu : car alors les deux angles AEG, KGE, qui sont suppléments l'un de l'autre, ont des sinus égaux; les trois angles AHT, KLB, KIF, ont aussi des sinus égaux. D'où il suit que l'équation précédente deviendra, $T \times AH = B \times KL - F \times KI$, ou $B \times KL = T \times AH + F \times KI$, qui ne renferme que des quantités constantes et indépendantes de la position du pont-levis. Ainsi, pourvu que le quadrilatere AEGK soit un parallélo-

gramme, le pont-levis demeurera en équilibre par lui-même, et sans le secours d'aucune puissance étrangere, dans toutes les situations qu'on pourra lui donner : avantage particulier de la figure parallélogrammique, indépendamment des facilités que cette figure offre pour la construction et la manœuvre.

III.

L'ÉQUATION $B \times KL = T \times AH + F \times KI$, ne renferme en aucune maniere le poids des chaînes ; et les conditions de l'équilibre sont exprimées par la même formule que si les chaînes n'avoient absolument aucune pesanteur. Cela est une suite nécessaire de l'hypothese, que le pont-levis conserve la figure parallélogrammique dans toutes les situations possibles. Si les chaînes ont une pesanteur sensible et comparable aux poids T, F, B, il sera impossible que cette figure subsiste à la rigueur, en regardant toujours les chaînes comme parfaitement flexibles. Quoique la théorie précédente ne laisse là-dessus aucun doute, en voici néanmoins une démonstration particuliere, appliquée à un cas où il semble que le parallélisme des côtés du quadrilatere AEGK devroit le plus se conserver.

IV.

SUPPOSONS que le quadrilatere AEGK (Fig. 79) soit un parallélogramme ; que les deux points A et K soient placés dans une même ligne verticale, ainsi que les deux points E et G, et que les chaînes n'aient aucune pesanteur, ou soient regardées comme de simples fils inextensibles et non pesants ; que tout le système soit en équilibre. Il est clair que le fil GE est également tendu dans le sens EG et dans le sens GE, et qu'en nommant ϕ cette tension, on a rigoureusement, $T \times AH = \phi \times AE$; $B \times KL - F \times KI$

$= \phi \times KG = \phi \times AE$; ce qui donne, $T \times AH = B \times KL - F \times KI$. Cette équation aura lieu à la rigueur dans toutes les positions possibles du pont-levis; et la figure parallélogrammique du quadrilatere AEGK subsistera toujours, tant que le fil GE n'aura aucune pesanteur. Maintenant, qu'on attache un poids à ce fil, ou que les chaînes deviennent pesantes : l'équilibre précédent ne peut plus subsister, les points G et E se rapprochent nécessairement l'un de l'autre; les chaînes prennent la courbure $\gamma\varepsilon$; et le parallélogramme AEGK se change en la figure A$\varepsilon\gamma$K. D'où l'on doit conclure en général par la raison inverse, que si le quadrilatere AEGK conserve la figure parallélogrammique dans toutes les positions possibles, le poids des chaînes doit être regardé comme nul en comparaison de la tension des chaînes, occasionnée par les forces T, F, B. Ce poids ne doit donc pas se trouver dans l'équation de l'équilibre.

Remarque.

159. Les chaînes ont été regardées jusqu'ici comme parfaitement flexibles; mais elles ne sont pas telles à beaucoup près. Elles sont composées d'anneaux oblongs de fer qui ne peuvent pas se plier dans toute l'étendue de leur longueur particuliere; de plus ces mêmes anneaux, en s'entrelaçant les uns dans les autres, éprouvent un frottement qui s'oppose encore à la flexibilité de la chaîne. Tout cela détruit en grande partie la courbure de cette même chaîne. J'abandonne donc l'hypothese proposée, et j'en prends une toute contraire, qui semble plus conforme à l'état physique des choses : je considere les chaînes comme dépourvues de toute flexibilité, et comme des barres GE, attachées par leurs extrémités au tablier et aux fleches, par le moyen d'anneaux ou de crochets qui leur donnent en ces endroits toute liberté de tourner circulairement dans le plan du pont-levis, à mesure qu'il monte ou qu'il s'abaisse.

PROPOSITION IV. PROBLÊME.

160. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre d'un pont-levis, dans l'hypothese précédente.*

Que AEGK (Fig. 80) soit un quadrilatere quelconque, composé d'un tel assemblage, et parvenu dans une position quelconque. Des points d'appui A et K soient abaissées, comme ci-dessus, les perpendiculaires At, Kg, Ke, sur les directions des poids T, F, B, et soient menées les perpendiculaires Ab, Kd, à la barre EG. Nommons C le poids de cette barre, réuni à son centre de gravité ou milieu O; et décomposons ce poids en deux forces verticales qui passent par les points E et G, et qui en sont par conséquent chacune la moitié (45); menons les perpendiculaires Am, Kn, sur leurs directions. Il est évident que la barre EG est également tirée suivant sa longueur, dans le sens EG et dans le sens GE. Donc, en nommant X cette force de tension, le levier AE, aux points H, E, duquel sont appliquées trois forces, deux verticales, savoir, T et $\frac{C}{2}$, la troisieme X, dirigée suivant EG, donnera (152) pour condition d'équilibre l'équation $T \times At + \frac{C}{2} \times Am = X \times Ab$. De même, le levier GKM, aux points G, I, L, duquel sont appliquées quatre forces, trois, $\frac{C}{2}$, F, B, verticales, et la quatrieme X, dirigée suivant GE, donnera pour condition de l'équilibre l'équation $\frac{C}{2} \times Kn + X \times Kd + F \times Kg = B \times Ke$; ou bien $B \times Ke - \frac{C}{2} \times Kn - F \times Kg = X \times Kd$. Tirant de chaque équation la valeur de X, on formera celle-ci,

$$\frac{T \times At + \frac{C}{2} \times Am}{Ab} = \frac{B \times Ke - \frac{C}{2} \times Kn - F \times Kg}{Kd}.$$

Et comme, en nommant 1 le sinus total, on a, $At = AH \times \sin. AHT$, $Am = AE \times \sin. AEm$, $Ab = AE \times \sin. AEG$, $Ke = KL \times \sin. KLB$, $Kn = KG \times \sin. KGn$,

$Kg = KI \times \sin. KIF$, $Kd = KG \times \sin. KGE$: notre équation deviendra,

$$\frac{T \times AH \times \sin. AHT + \frac{C}{2} \times AE \times \sin. AEm}{AE \times \sin. AEG} = \ldots$$

$$\frac{B \times KL \times \sin. KLB - \frac{C}{2} \times KG. \sin. KGn - F. KI. \sin. KIF}{KG \times \sin. KGE},$$

qui exprime les conditions de l'équilibre, mais qui variera à mesure que le quadrilatere changera de position, lorsque ce quadrilatere ne sera pas un parallélogramme.

COROLLAIRE.

161. SUPPOSONS que le quadrilatere en question soit un parallélogramme : on aura, $AE = KG$, $\sin. AEG = \sin. KGE$, $\sin. AHT = \sin. AEm = \sin. KGn = \sin. KIF = \sin. KLB$. Par conséquent, notre équation deviendra, $T \times AH + \frac{C}{2} \times AE = B \times KL - \frac{C}{2} \times AE - F \times KI$; ou bien, $B \times KL = T \times AH + C \times AE + F \times KI$, qui differe de celle de l'article 158, n°. 11, en ce qu'elle contient de plus que celle-ci le terme $C \times AE$ relatif au poids des chaînes.

SCHOLIE.

162. ON voit que les deux manieres dont nous avons envisagé les chaînes donnent pour les conditions de l'équilibre du pont-levis des équations qui ne different que par un seul terme, qui est ordinairement le plus petit de tous. La seconde formule $B \times KL = T \times AH + F \times KI + C \times AE$, paroît devoir être préférée dans la pratique.

Quand on aura réglé de l'une ou de l'autre maniere les dimensions du pont-levis, eu égard aux bois et aux ferrures qui y entrent, on sera assuré qu'il demeurera par lui-même en équilibre dans toutes les situations possibles, et que par

conséquent l'agent destiné à le mouvoir n'aura simplement à vaincre, à chaque instant, que la résistance du frottement.

De la Balance.

163. La balance (Fig. 81), machine destinée à peser des marchandises, est composée d'un levier droit AB, nommé *fléau*, aux extrémités duquel sont suspendus avec des cordons deux *bassins* C et D, qui reçoivent les marchandises qu'on veut peser. Le fléau porte dans son milieu un axe *xy*, qui lui est perpendiculaire, et dont les extrémités entrent et tournent librement dans des *yeux* pratiqués aux deux branches montantes d'une *chasse* EM, qui soutient la machine. Ces extrémités de l'axe n'ont pas la forme cylindrique; elles sont taillées en couteaux plus ou moins émoussés, suivant que la balance est destinée à peser des marchandises plus ou moins pesantes ; le fléau s'appuie par les tranchants de ces couteaux dans les yeux de la chasse, avec une entiere liberté de s'incliner de part et d'autre ; il porte une *aiguille fg*, qui est dans la chasse quand il y a équilibre, et que le fléau est horizontal ; et qui, en s'écartant à droite ou à gauche de la chasse par sa partie supérieure, fait connoître non seulement en quel sens le fléau s'est incliné, mais encore les plus petites inclinaisons dont il peut être affecté.

Il est clair que la balance est un levier de la premiere espece. On doit commencer par la mettre en équilibre, indépendamment des poids qu'on veut peser les uns contre les autres. Quand cette premiere opération sera faite, et qu'en conséquence le fléau se tiendra dans la position horizontale, la balance sera dans le même cas que si ses parties n'avoient aucune pesanteur ; et on ne devra plus s'occuper que des poids qu'on met dans les bassins. Ceux qui sont placés d'un côté, étant supposés connus, feront connoître aussi les autres.

Proposition V. Problème.

164. Indiquer *les précautions qu'il faut prendre pour qu'une balance soit parfaitement juste.*

I.

Il est d'abord essentiel que les deux bras EA, EB, soient exactement égaux. Si, cette condition étant remplie, et les deux bras étant garnis de leurs bassins, un des côtés l'emporte sur l'autre, on mettra du côté le plus foible de petits poids en quantité suffisante pour établir l'équilibre, et maintenir le fléau dans la position horizontale. Ces petits poids doivent être regardés comme faisant partie de la balance même, et comme étrangers à ceux qu'on veut contrepeser.

II.

Si les deux bras AE, BE, n'étoient pas égaux, le plus long favoriseroit le poids placé de son côté; car, supposons que le fléau AB étant en équilibre et dans la position horizontale, on mette dans le bassin C un poids P, et dans le bassin D une marchandise Q, de maniere qu'il y ait équilibre; ces deux poids se faisant équilibre, on aura (148), $P:Q :: BE:AE$. Donc, si, par exemple, $BE > AE$, on aura, $P > Q$. Les deux poids étant donc supposés égaux, l'un d'eux cependant l'emportera sur l'autre, et paroîtra plus pesant. On appelle ces sortes de balances, *balances fausses.* Elles peuvent servir néanmoins à déterminer exactement le poids d'une marchandise. Voici comment.

III.

Sans vous embarrasser quel est le plus long bras d'une balance que vous soupçonnez être fausse, mettez, 1°. dans

l'un des bassins, par exemple, dans le bassin D, la marchandise Q, que vous voulez peser ; et observez le poids P, qui lui fait équilibre. 2°. Transposez la marchandise Q, mettez-la dans l'autre bassin C, et observez encore le poids P', qui lui fait équilibre. Cela posé, multipliez P par P', et tirez la racine quarrée du produit ; elle sera la valeur exacte de Q. Car le premier équilibre donne (146) l'équation $P \times AE = Q \times BE$; et le second donne de même, $Q \times AE = P' \times BE$. Divisant la premiere équation par la seconde, on aura, $\frac{P}{Q} = \frac{Q}{P'}$, et par conséquent $Q^2 = P \times P'$; donc $Q = \sqrt{(P \times P')}$.

IV.

Une chose à laquelle on doit faire la plus grande attention, est de mettre, autant qu'il est possible, dans une même ligne horizontale, le tranchant du couteau qui sert d'axe, et les deux points A et B d'où pendent les bassins. Car si le point d'appui E (Fig. 82 et 83) est au-dessous ou au-dessus de l'horizontale AB, pour peu que cette ligne soit inclinée à l'horizon, elle sera divisée en deux parties inégales par la verticale EM menée par l'appui ; et conséquemment les poids qui se feront équilibre, ne seront pas égaux. Dans le premier cas (Fig. 82), la balance est trop mobile sur le point E, et elle est nommée *folle;* dans le second (Fig. 83), elle trébuche trop difficilement, et elle est appelée *sourde.* Cette seconde disposition a moins d'inconvénients que la premiere, et l'aiguille sert à faire connoître le plus léger trébuchement d'un côté ou d'autre.

Je n'entre pas dans les détails qui concernent la construction même de la balance, et le choix des matieres dont elle doit être faite.

Du Peson ou de la Romaine.

165. Le peson ou la romaine sert à peser des marchandises de différentes pesanteurs, par le moyen d'un seul et

même poids qu'on éloigne plus ou moins du point d'appui. Cette machine (Fig. 84) est composée d'un fléau AB, suspendu par une anse EK, qui le divise en deux bras EA, EB, fort inégaux. Le bras le plus court porte un bassin C ou un crochet, destiné à soutenir les marchandises qu'on veut peser; et on fait couler, au moyen d'un anneau, le long du bras EB, le poids constant P qui doit leur faire équilibre.

PROPOSITION VI. PROBLÈME.

166. DÉTERMINER *les points de division du bras* EB, *auxquels doit répondre le poids donné* P, *pour faire équilibre à différents poids* Q *placés en* C.

Soient G le poids du bras EB réuni à son centre de gravité N; F le poids du bras EA réuni à son centre de gravité H; C le poids du bassin ou du crochet, lequel est censé agir suivant la verticale AC. Qu'on mette successivement en C différents poids Q, Q′, Q″, Q‴, etc.; et supposons que, pour faire prendre au fléau la position horizontale, et établir l'équilibre, il faille appliquer successivement le poids constant P aux points a, b, c, d, etc.; les différentes équations d'équilibre seront (152),

$$Q \times EA + F \times EH + C \times EA = P \times Ea + G \times EN,$$
$$Q' \times EA + F \times EH + C \times EA = P \times Eb + G \times EN,$$
$$Q'' \times EA + F \times EH + C \times EA = P \times Ec + G \times EN,$$
$$Q''' \times EA + F \times EH + C \times EA = P \times Ed + G \times EN, \text{etc.}$$

Retranchant successivement la premiere équation de la seconde, la seconde de la troisieme, la troisieme de la quatrieme, etc., on aura:

$$(Q' - Q) \times EA = P \times ab, \text{ ou } ab = \frac{(Q' - Q) \times EA}{P},$$
$$(Q'' - Q') \times EA = P \times bc, \text{ ou } bc = \frac{(Q'' - Q') \times EA}{P},$$
$$(Q''' - Q'') \times EA = P \times cd, \text{ ou } cd = \frac{(Q''' - Q'') \times EA}{P}, \text{ etc.}$$

COROLLAIRE I.

167. Il suit de là, 1°. que si les poids Q, Q′, Q″, Q‴, etc. croissent en progression arithmétique, en sorte qu'on ait $Q' - Q = Q'' - Q' = Q''' - Q'' =$ etc.; toutes les divisions *ab*, *bc*, *cd*, etc., seront égales entre elles. 2°. Qu'en faisant chacune de ces parties *ab*, *bc*, etc., égale au plus petit bras EA de la balance, on aura,
$\frac{Q'-Q}{P} = 1$, ou $P = Q' - Q$; $\frac{Q''-Q'}{P} = 1$, ou $P = Q'' - Q'$, etc.; c'est-à-dire que le contrepoids P sera égal à la différence de la progression arithmétique des marchandises Q, Q′, Q″, etc.

COROLLAIRE II.

168. Si on se donne P, le premier terme Q de la progression arithmétique n'est point arbitraire; il doit être tel qu'on ait $Q \times EA + F \times EH + C \times EA = P \times Ea + G \times EN$.

Dans la pratique, il convient de mettre d'abord la balance en équilibre par elle-même, indépendamment des poids P et Q. C'est à quoi on parvient, ou en mettant dans le bassin C un petit poids, ou en attachant un petit poids au bras EB, selon qu'un côté l'emporte sur l'autre. Supposons le premier cas, et comprenons le petit poids additionnel dans celui C du bassin; nous aurons alors $F \times EH + C \times EA = G \times EN$. Donc $Q \times EA = P \times Ea$; donc, en faisant $Ea = EA$, on aura (à cause de $P = Q' - Q$), $Q = Q' - Q$, ou $Q' = 2Q$. Ainsi le premier terme de la progression arithmétique sera Q, et la raison sera aussi Q. D'où l'on voit qu'alors, en prenant sur le plus long bras EB des parties égales au plus court EA, on pourra, avec un poids donné P, appliqué aux différentes divisions, faire équilibre à une suite de poids P, 2P, 3P, 4P, 5P, etc.

REMARQUE.

169. Les parties égales *ab*, *bc*, *cd*, etc. peuvent elles-

8

mêmes être sous-divisées, pour contrepeser, toujours avec le même poids P, les poids intermédiaires à ceux de la suite P, 2P, 3P, 4P, etc. Soit une marchandise $= P + \frac{m}{n} P$, m et n étant des nombres positifs, dont le second est plus grand que le premier. Mettons ce poids en C, et nommons x la distance du contrepoids P au point a. Il est clair, par l'équation $ab = \frac{(Q'-Q) \times EA}{P}$, qu'on aura ici, $x = \frac{\frac{m}{n} P \times EA}{P}$ $= \frac{m}{n} EA = \frac{m}{n} ab$. Ainsi aux fractions du poids répondent des fractions analogues de la partie ab. Il en est de même pour les parties suivantes bc, cd, etc.

Scholie.

170. Cette balance a cela d'avantageux, qu'avec un seul et même poids, on peut contrepeser d'autres poids très considérables. De plus, elle fatigue moins les yeux de la chasse que la balance ordinaire; car si, par exemple, on veut contrepeser avec celle-ci un poids 4 P, les deux bassins portent chacun un poids pareil; et la pression sur les yeux de la chasse est (45) 4 P + 4 P, ou 8 P; au lieu que, dans la romaine, où le poids P, appliqué à la quatrieme division du bras EB, contrepese le poids 4 P mis dans le bassin C, la pression sur les yeux de la chasse est simplement (45) 4P + P, ou 5 P. Mais, d'un autre côté, le bras EB de la romaine est exposé à se plier, quand il est un peu long; ce qui est un inconvénient auquel la balance ordinaire est moins sujette; de plus, les deux bras de celle-ci se plient également, du moins à-peu-près.

Il est évident qu'au lieu de supposer que le poids, appliqué au plus long bras EB, est constant, et l'autre variable, on pourroit faire une balance où ce dernier poids seroit constant, et le premier variable. Cette balance est l'inverse de la précédente. Il est trop facile de la diviser, d'après ce

qui précede, pour qu'il soit nécessaire d'entrer ici dans ce détail.

Du Peson suédois ou danois.

171. La balance, qu'on a ainsi nommée à cause du grand usage qu'on en fait en Suede et en Danemarck, est une longue piece AB (Fig. 85) de fer ou de bois, portant à l'une de ses extrémités une lourde masse A, et à l'autre un bassin ou un crochet C, pour soutenir les marchandises qu'on veut peser; elle est traversée par un anneau E, qui la soutient, et qu'on fait glisser suivant sa longueur, jusqu'à ce qu'il y ait équilibre de part et d'autre du point E.

PROPOSITION VII. PROBLÊME.

172. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre dans le peson danois.*

Considérons le système de la masse A, de la verge AB, et du bassin ou crochet C, comme ne faisant qu'un même poids P réuni à son centre de gravité H. Nommons Q le poids de la marchandise qu'on veut peser: on aura, en vertu de l'équilibre, $P \times EH = Q \times BE$; ou bien, $P \times (BH - BE) = Q \times BE$; ce qui donne $BE = \frac{P \times BH}{P + Q}$. D'où l'on voit que, connoissant P et BH, il sera facile de graduer la verge BH, relativement aux différents poids Q, qu'on veut peser.

SECTION III.

Des Poulies simples ou composées.

173. La poulie (Fig. 86) est un cercle, ou plutôt un cylindre peu épais, creusé extérieurement à sa surface en

forme de gorge, pour recevoir une corde tirée de part et d'autre par deux puissances Q et S. Elle est traversée, perpendiculairement à son centre O, par un boulon, dont les extrémités tournent librement dans les branches d'une anse ou *chappe* OK.

174. Il peut arriver que la poulie soit *mobile* ou *immobile*, selon qu'elle s'éleve ou non avec le poids, ou, en général, selon qu'elle change ou non de place, pour vaincre la résistance.

175. On appelle *moufles*, et, en termes de marine, *palans*, *caliornes*, des assemblages de plusieurs poulies, les unes fixes, les autres mobiles, toutes embrassées par une même corde. Les poulies fixes sont portées par une même chappe; et les poulies mobiles, par une autre chappe. Elles peuvent avoir différentes dispositions, comme on le voit dans les Figures 94, 95, 96, 97, 98.

Proposition I. Problême.

176. Determiner *les conditions de l'équilibre pour la poulie simple, non pesante.*

I.

Soit FGHM (Fig. 86) une poulie sans pesanteur, embrassée dans sa partie FGH par une corde tirée par les deux puissances Q et S, qui se font équilibre. Il est visible que ces deux puissances sont nécessairement égales, ou que la corde est également tendue des deux côtés; autrement cette corde glisseroit, ou feroit tourner la poulie vers le côté où seroit la plus grande puissance. L'égalité en question auroit encore lieu, quand même la poulie n'auroit pas la forme circulaire; mais on préfere la forme circulaire, comme la plus simple et la plus commode de toutes dans la

pratique, relativement aux différents usages qu'on y fait de la poulie. Prolongeons les directions des deux puissances Q et S, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en A; et ayant pris les parties égales AB, AC, pour représenter les quantités de ces puissances, achevons le parallélogramme lozange ABDC. La diagonale AD, qui est évidemment dirigée au centre O du cercle, représentera la résultante des deux puissances Q et S. Donc, si la poulie est fixe, le point d'appui devra résister dans le sens OA, et supportera un effort représenté par AD; et si la poulie est mobile, la force appliquée à la chappe dans le sens OA, sera représentée par une partie de sa direction, égale à AD. Ainsi, en nommant pour l'un et l'autre cas, P la résistance qui détruit la force AD, on aura (34), P:Q:S ::AD:AB:AC ou BD; ou bien (39), P:Q:S::sin. QAS: sin. OAS:sin. OAQ; ou, à cause que les deux angles OAQ, OAS sont chacun la moitié de l'angle QAS, P:Q ou S:: sin. QAS:sin. $\frac{1}{2}$QAS.

II.

Menons du centre O, les rayons OF, OH, aux points d'attouchement des cordons avec la poulie, et tirons la soutendante FH de l'arc FGH enveloppé par la corde. Les deux triangles ABD, OFH, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont semblables et donnent, AD: AB:BD::FH:OF:OH. Ainsi, puisqu'on a P:Q:S::AD: AB:BD, on aura aussi, P:Q:S::FH:OF:OH; c'est-à-dire que *les deux puissances* Q *et* S, *et la résistance* P, *sont proportionnelles aux rayons, et à la soutendante de l'arc embrassé par la corde.*

Corollaire.

177. Il suit de là que *si les deux cordons* FQ, HS (Fig. 87), *sont paralleles, chacune des deux puissances* Q *et* S *ne sera que la moitié de la résistance* P. Ainsi, en attachant

l'une des extrémités de la corde au point fixe S (Fig. 53), on soutiendra le poids P par le moyen d'une puissance Q qui n'en est que la moitié; mais aussi, dans le cas du mouvement, le poids ira deux fois moins vîte que la puissance, comme nous l'avons déja remarqué (126).

PROPOSITION II. PROBLÈME.

178. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre, lorsque la poulie est pesante.*

Lorsque la poulie FGHM (Fig. 88 et 89), à laquelle les deux puissances Q et S sont appliquées, est pesante, il faut prolonger les directions des deux puissances Q et S, qui sont toujours égales, jusqu'à ce quelles se rencontrent en A; et ayant construit le lozange ABDC, dont la diagonale AD passe par le centre, on prendra sur le prolongement de AD, la partie OI = AD; on supposera que le poids de la poulie soit exprimé par la verticale OL; et on fera le second parallélogramme OINL, dont la diagonale ON exprimera la résultante des deux puissances Q, S, et du poids de la poulie. Ainsi la résistance appliquée à la chappe devra être dirigée dans le sens NOK; et si l'on nomme P cette résistance, p le poids de la poulie, on aura cette suite de rapports égaux, $P:p:Q:S::ON:OL:AB:AC$.

Si non seulement la poulie étoit pesante, mais qu'elle fût encore chargée d'un poids X, la construction précédente et le résultat qui s'ensuit subsisteroient toujours, en comprenant le poids X dans le poids p.

REMARQUE.

179. IL est évident, par les deux problèmes précédents, que si les puissances Q et S (Fig. 90) tirent de bas en haut, et que la poulie, pesante ou non, et chargée d'un poids X, demeure en équilibre sans le secours d'aucun appui ou d'aucune autre puissance, la résultante des deux puissances

Q et S sera nécessairement verticale, puisqu'elle sera égale et contraire (Ax. II) à l'action du poids appliqué au centre O de la poulie. Les deux puissances Q et S feront donc alors des angles égaux avec la verticale.

PROPOSITION III. PROBLÊME.

180. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre pour un systéme de poulies mobiles, non pesantes.*

Soit (Fig. 91) un système de poulies non pesantes et mobiles, C, G, M. La premiere, qui soutient un poids P, est embrassée par une corde, dont une extrémité est arrêtée fixement en D, l'autre est appliquée à la chappe de la seconde poulie; celle-ci est embrassée par une corde arrêtée d'un côté fixement en E, et attachée de l'autre à la chappe de la troisieme poulie, qui est elle-même embrassée par une corde attachée fixement en O par un bout, et tirée de l'autre côté par la puissance Q; ainsi de suite, s'il y avoit un plus grand nombre de poulies. Supposons que tout le système soit en équilibre; et menons les rayons et les soutendantes des poulies, comme on le voit dans la Figure. En considérant, ce qui est permis, l'équilibre de la poulie C, comme si cette poulie existoit seule, et nommant F la tension du cordon AF: on aura (176), P:F::AB:AC. Par la même raison, en nommant K la tension du cordon IK, on aura, F:K :: IH:IG. La troisieme poulie M donnera de même, K:Q::NR:NM.

Mettons ces proportions les unes sous les autres, et multiplions-les par ordre; nous trouverons, P:Q :: AB × IH × NR:AC × IG × NM; c'est-à-dire que *le poids, ou en général la résistance P, est à la puissance Q, comme le produit des soutendantes, est au produit des rayons.*

REMARQUE.

181. ON doit remarquer que, pour se ménager la liberté de donner à la puissance Q telle direction qu'on veut, on

fait passer souvent la corde NQ sur une poulie fixe X, qu'on appelle *poulie de renvoi;* et qu'alors on applique la puissance en Q': mais il est clair (176) que cette puissance est toujours la même dans l'un et l'autre cas. On emploie les poulies de renvoi dans plusieurs autres occasions.

COROLLAIRE.

182. LORSQUE les cordons DB, AF, EH, etc. (Fig. 92), sont paralleles, les soutendantes deviennent des diametres; et on a, P:Q :: 2 × 2 × 2 : 1 × 1 × 1. D'où l'on voit qu'alors *le poids, ou la résistance, est à la puissance, comme le nombre 2, élevé à une puissance marquée par le nombre des poulies mobiles, est à l'unité.*

Il est clair que la poulie de renvoi X n'entre jamais dans ces rapports.

SCHOLIE.

183. ON voit par-là qu'en augmentant convenablement le nombre des poulies mobiles, on peut, avec une force médiocre, faire équilibre à des poids très considérables. Par exemple, dans notre Figure, où il y a trois poulies mobiles, la puissance n'est que la huitieme partie du poids. Mais qu'on fasse passer la machine du repos au mouvement, la puissance ira huit fois plus vîte que le poids : on perd donc en temps ce qu'on gagne en force.

PROPOSITION IV. PROBLÊME.

184. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre pour un systéme composé de poulies fixes et de poulies mobiles.*

I.

SOIT (Fig. 93) un nombre quelconque de poulies fixes, A, B, C, D, et de poulies E, F, G, mobiles, et chargées

des poids P, R, T; toutes embrassées par une même corde, qui est tirée à ses extrémités par deux puissances Q et S. Tout le système étant supposé en équilibre, il est évident que la corde est également tendue dans toutes ses parties; car les deux cordons qui tirent sur chaque poulie fixe ou mobile, considérés en particulier, sont également tendus: d'où l'on voit, en allant de proche en proche, que la corde entiere est par-tout également tendue, et que par conséquent les deux puissances Q et S sont égales entre elles. Quand l'équilibre est établi, on peut, à la place de l'une S des puissances, substituer un point fixe auquel la corde soit attachée; la puissance Q demeure toujours la même.

II.

Prolongeons les cordons appliqués aux poulies mobiles, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent aux points *a*, *g*, *n*; et, ayant pris sur leurs directions les parties égales *ab*, *af*, *gh*, *gm*, *no*, *ns*, pour représenter les tensions égales des mêmes cordons, dont chacune peut être exprimée par la puissance Q, décomposons ces tensions en deux sortes de forces, les unes horizontales, et les autres verticales, en faisant les parallélogrammes rectangles que la Figure représente. Les poulies E, F, G; étant indépendantes les unes des autres, et ayant la liberté de se mouvoir en tout sens, il faut nécessairement, pour qu'il y ait équilibre, que les forces, appliquées à chacune d'elles en particulier, se détruisent par elles-mêmes, et indépendamment de celles qui agissent sur les autres poulies. Ainsi, pour la poulie E, les deux forces horizontales *ac*, *ae*, sont égales et se détruisent; et la somme $ad + ad$, ou $bc + fe$ des deux forces verticales *ad* est égale au poids P; en sorte qu'on a, Force $ac =$ Force ae, $P =$ Force $bc +$ Force fe.

De même, pour la poulie F, on a, Force $gi =$ Force gl, $R =$ Force $hi +$ Force ml.

Et pour la poulie G, on a, Force $np =$ Force nr, $T =$ Force $op +$ Force sr.

Or, tous les triangles rectangles acb, aef, gih, etc., ayant des hypoténuses égales, les côtés bc, fe, hi, etc., peuvent être regardés comme les sinus des angles que les cordons font avec l'horizon. Donc, en nommant r le rayon ou sinus total, on aura,

$$P = \frac{Q \times (\text{sin. } bac + \text{sin. } fae)}{r};\ R = \frac{Q \times (\text{sin. } hgi + \text{sin. } mgl)}{r};$$

$$T = \frac{Q \times (\text{sin. } onp + \text{sin. } snr)}{r};\ P + R + T = \ldots$$

$$\frac{Q\,(\text{sin. } bac + \text{sin. } fae + \text{sin. } hgi + \text{sin. } mgl + \text{sin. } onp + \text{sin. } snr)}{r}.$$

Ces équations donnent les proportions,

$P:Q::$ sin. bac + sin. $fae:r$,
$R:Q::$ sin. hgi + sin. $mgl:r$,
$T:Q::$ sin. onp + sin. $snr:r$,
$P:R::$ sin. bac + sin. fae:sin. hgi + sin. mgl,
$P:T::$ sin. bac + sin. fae:sin. onp + sin. snr,
$R:T::$ sin. hgi + sin. mgl:sin. onp + sin. snr,
$P + R + T:Q::$ sin. bac + sin. fae + sin. hgi + sin. mgl + sin. onp + sin. $snr:r$.

D'où l'on voit, 1°. que *chaque poids, appliqué à l'une des poulies mobiles, est à la puissance, comme la somme des sinus des angles que les deux cordons tangents à cette poulie font avec l'horizon, est au sinus total.*

2°. Que *les poids sont entre eux, comme les sommes des sinus des angles que forment avec l'horizon les cordons tangents aux poulies mobiles qui les soutiennent.*

3°. Que *la somme de tous les poids est à la puissance, comme la somme des sinus des angles que les cordons tangents aux poulies mobiles font avec l'horizon, est au sinus total.*

Remarque.

185 Le système proposé étant abandonné à lui-même, et étant parvenu à la situation d'équilibre après quelques mouvements d'oscillation dont il ne s'agit pas ici, aura tou-

jours une disposition telle que les conditions mentionnées seront remplies. Mais si, connoissant les poids P, R, T, et la puissance Q ou S, on veut déterminer cette disposition *à priori*, cela sera aisé. Il faudra, pour cela, que dans la poulie E, les deux angles *bac*, *fae*, soient égaux, pour avoir des forces horizontales *ac*, *ae*, égales entre elles. De plus, ces angles doivent être tels que la somme des deux forces verticales *bc*, *fe*, ou le double de l'une *bc* d'elles soit égal au poids P; ce qui est facile à obtenir, puisqu'il s'agit simplement de résoudre un triangle rectangle *bac*, dans lequel on connoît l'hypoténuse *ab*, expression de la puissance *donnée* Q, et le côté *bc*, expression de la moitié du poids P aussi *donné*. On raisonnera de même pour les poulies F et G.

PROPOSITION V. PROBLÊME.

186. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre, lorsque les poulies sont assemblées dans deux chappes, l'une fixe, l'autre mobile.*

Supposons (Fig. 94 et 95) que les poulies supérieures, A, B, C, etc., soient assemblées dans une même chappe fixe AK, et que les inferieures E, F, G, soient assemblées dans une même chappe mobile EF chargée d'un poids P. Ce poids doit être regardé comme formé du poids particulier de la moufle inférieure et de ses poulies, et du poids étranger que cette moufle souleve. Que toutes les poulies soient embrassées par une même corde dont une extrémité est tirée par la puissance Q, l'autre est arrêtée fixément en S à la chappe supérieure ou inférieure; et que tout le système soit en équilibre. Il est clair, comme dans l'article 184, que toutes les parties de la corde sont également tendues, et que chaque tension peut être représentée par la puissance Q.

Je décompose chacune des tensions égales des cordons qui soutiennent la moufle inférieure, en deux sortes de

forces, les unes horizontales, les autres verticales, comme on le voit dans les deux Figures. Il n'y a plus équilibre maintenant entre les forces particulieres qui agissent sur chacune des poulies inférieures, parceque ces poulies étant contenues dans une même chappe, à des distances fixes les unes des autres, doivent être regardées comme ne formant qu'un même tout, assujetti à suivre le mouvement de la chappe qui les assemble. Mais il y aura équilibre dans le systéme, si l'on suppose,

1°. Que la résultante de toutes les forces horizontales qui tirent dans un sens, soit égale et directement opposée à la résultante de toutes les forces horizontales qui tirent dans le sens opposé; c'est-à-dire, qu'en nommant F et F′ ces deux résultantes, qui sont chacune (50) la somme de leurs forces composantes, on ait $F = F'$; et que de plus ces forces F et F′ agissent suivant une même ligne horizontale, l'une de gauche à droite, l'autre de droite à gauche.

2°. Que la résultante des forces verticales qui proviennent des tensions des cordons proposés, soit égale et directement opposée au poids P; en sorte que, nommant G cette résultante, on ait $G = P$; et que la force G agisse dans la direction de la verticale PI.

Cela posé, on voit, à l'inspection de nos deux Figures, que les tensions égales des cordons qui tirent la moufle inférieure étant représentées par des parties égales de leurs directions, la somme des forces verticales qui en proviennent, ou (50) la force G, est représentée par la somme des sinus des angles que ces cordons forment avec l'horizontale, tandis que l'une des tensions, ou la puissance Q, est exprimée par le sinus total. Donc, à cause de $P = G$, il s'ensuit que *le poids* P *est à la puissance* Q, *comme la somme des sinus des angles que forment avec l'horizon les cordons qui soutiennent la moufle inférieure, est au sinus total.*

REMARQUE.

187. La moufle inférieure, chargée du poids P, étant

abandonnée à elle-même, finira par prendre la position d'équilibre; et alors la proportion qu'on vient de trouver, aura toujours lieu : cela suffit pour la pratique. Le problème inverse, ou la détermination générale, et *à priori*, de la position que la moufle inférieure doit prendre pour qu'il y ait équilibre, mene à des calculs qui, sans être difficiles, sont longs et de peu d'usage. Je les supprime, par cette raison.

COROLLAIRE.

188. QUE le système étant toujours en équilibre, les cordons qui agissent sur la moufle inférieure, deviennent paralleles ; ils seront nécessairement verticaux. Car, si, étant paralleles, ils n'étoient pas verticaux, ils seroient tous inclinés dans le même sens : d'où il suit que les forces horizontales, agissant toutes dans le même sens, ne pourroient pas se détruire, et que par conséquent il n'y auroit pas équilibre. De plus, le sinus de l'angle formé par chacun de ces cordons avec l'horizon devient le sinus total. Donc alors (184) *le poids est à la puissance, comme le nombre des cordons qui tirent la moufle inférieure, est à l'unité.*

SCHOLIE I.

189. ON voit par-là que le poids est à la puissance dans le plus grand rapport possible, lorsque les cordons qui tendent à soulever la moufle mobile sont paralleles, et par conséquent verticaux. Cette disposition est donc la plus avantageuse de toutes, pour faire équilibre, avec une force donnée, au plus grand poids possible. Mais, dans le cas du mouvement, la vîtesse du poids est à celle de la puissance, comme l'unité est au nombre des cordons qui tirent la moufle inférieure. Ainsi on perd en temps ce qu'on gagne en force.

SCHOLIE II.

190. LE principal usage des moufles dans la pratique

étant de faire gagner de la force, on s'attache, autant qu'il est possible, à rendre les cordons paralleles. On voit des exemples de ce parallélisme dans les Figures 96, 97, 98. La corde peut être arrêtée à la moufle supérieure ou à l'inférieure.

Dans la Figure 96, les centres des poulies de chaque chappe sont dans une même ligne droite; et les diametres de ces poulies croissent, en allant suivant l'ordre de la corde, à partir du point où elle est attachée à l'une des moufles, croissent, dis-je, comme une progression arithmétique, dont la différence est le diametre de la plus petite poulie. Cet assemblage a l'inconvénient d'être un peu volumineux.

Dans la Figure 97, toutes les poulies des deux moufles ont des diametres égaux, et celles de chaque moufle sont traversées par un goujon commun. Ces sortes de moufles sont fort en usage. Les cordons n'y sont pas exactement paralleles; mais ce défaut est peu considérable.

Dans la Figure 98, les poulies de chaque moufle forment une espece de cône tronqué ou de *fusée*. Les diametres des poulies vont en progression arithmétique, suivant la même loi que dans la Figure 96. Cette troisieme espece de moufle est peu en usage.

REMARQUE.

191. La moufle supérieure est portée ordinairement par un appui, qu'on peut regarder comme invincible. Si on vouloit déterminer la pression qui résulte contre l'appui, en vertu du poids P et de la puissance Q, cela seroit aisé. Par exemple, dans la moufle de la Figure 94, on prolongera les directions du poids P et de la puissance Q, jusqu'a ce qu'elles se rencontrent en O; et prenant les parties OM, ON, pour représenter ces deux forces, on achevera le parallélogramme OMHN. La pression résultante de là contre l'appui, sera représentée par la diagonale OH.

Il n'est pas nécessaire de faire observer que si la moufle inférieure, au lieu de porter un poids, soutenoit une résistance dont la direction ne fût pas verticale, tout ce qu'on a dit pour le premier cas s'appliqueroit à celui-ci, en prenant pour la verticale la direction de la résistance, et pour l'horizontale la perpendiculaire à cette direction.

SECTION IV.

Du Tour, et de quelques autres Machines qui s'y rapportent.

192. Le *Tour*, *Treuil*, ou *Cabestan*, est une machine composée d'un cylindre et d'une roue, qui ont le même axe ; ou du moins, son effet peut toujours être regardé comme résultant d'un tel assemblage. Une puissance Q (Fig. 99), appliquée à la roue ou à ce qui en tient lieu, oblige la corde qui soutient le poids P à s'envelopper autour du cylindre, et par conséquent le poids à s'élever. Le cylindre est garni, à ses extrémités, de tourillons qui portent sur des appuis.

193. Cette machine a différentes dénominations, selon sa position et les usages auxquels elle sert. Quand le cylindre est horizontal, et par conséquent la roue verticale, elle s'appelle *Tour*, *Treuil*, quelquefois simplement *Roue*, du nom de la principale piece. On l'emploie beaucoup pour tirer des pierres du fond des carrieres, et en général pour soulever des fardeaux très pesants.

Dans ces sortes de cas, on garnit les jantes de la roue de chevilles auxquelles des hommes s'appliquent par leurs mains; ce qui leur donne le moyen de s'aider d'une partie de leurs poids pour faire tourner la machine.

Souvent, au lieu de se servir d'une roue garnie de chevilles, on se contente simplement de ficher perpendiculairement au cylindre (Fig. 100) des barres, aux extrémités desquelles des hommes agissent par leurs bras et par une partie de leur poids. On peut rapporter à cette espece de tour celui dont on se sert quelquefois (Fig. 101) pour tirer de l'eau d'un puits profond, et qu'on fait mouvoir par le moyen de *manivelles*, M, M.

Il y a des occasions où l'on emploie pour roue un grand tambour creux, dans lequel des hommes, en marchant, font tourner la machine par leur poids. Voyez les Figures 111, 112.

194. QUAND le cylindre est vertical (Fig. 102), la machine se nomme *cabestan*. Alors on n'y emploie presque jamais une roue; elle est suppléée par des barres horizontales qui traversent le cylindre, et que des hommes tirent ou poussent par leurs extrémités. Le cabestan est d'un grand usage dans la marine, pour lancer l'ancre à la mer, ou pour l'en retirer. Il sert aussi à terre en plusieurs occasions, comme pour tirer des pierres, ou des tonneaux pleins, d'un bateau qui est sur la riviere, ou pour mouvoir d'autres fardeaux très pesants, et les faire approcher d'un certain but.

195. IL est évident que les effets de toutes les différentes especes de tours reviennent, dans le fond, à celui du tour représenté par la Figure 99. Ainsi, je suppose qu'à la roue ABD (Fig. 103), et à la section MNK du cylindre, faite en un endroit quelconque, perpendiculairement à l'axe EF, on applique, suivant des directions tangentielles et situées respectivement dans des cercles paralleles ABD, MNK, une puissance Q et un poids P, qui se contrebalancent, et qui tendent à faire tourner la machine, en sens contraires, autour de l'axe EF.

PROPOSITION I. PROBLÊME.

196. DÉTERMINER, *dans cette hypothese*, 1°. *la relation que ces deux forces ont entre elles dans l'état d'équilibre* ; 2°. *les pressions qu'elles produisent sur les appuis* E *et* F, *qui portent la machine.*

Pour résoudre la premiere question, nommons R le rayon CA de la roue, r le rayon ON du cylindre ; et imaginons qu'ayant prolongé le rayon horizontal ON du cylindre, tellement qu'on ait une ligne égale à R, on applique à l'extrémité de cette ligne un poids représenté par $\frac{P \times r}{R}$. Ce nouveau poids tendra à produire (49) le même mouvement de rotation autour du point O, que le poids P. Ainsi, par rapport à ce mouvement, nous pouvons concevoir qu'à la place du poids P, on a substitué, à la distance R de l'axe, le poids $\frac{P \times r}{R}$. Alors nous aurons deux forces, Q et $\frac{P \times r}{R}$, appliquées, suivant des directions tangentielles, à deux cercles égaux, qu'elles tendent à faire tourner, en sens contraires, autour de l'axe EF. Donc il n'y aura pas de raison pour que la machine tourne dans un sens plutôt que dans l'autre, si ces deux forces sont égales, c'est-à-dire, si on a l'équation $Q = \frac{P \times r}{R}$. Cette équation donne la proportion, $P : Q :: R : r$. D'où l'on voit que, *dans le tour, le poids* P *et la puissance* Q *étant supposés en équilibre, le poids est à la puissance, comme le rayon de la roue est à celui du cylindre.*

Il peut arriver que les deux forces P et Q soient dans un même plan. La proportion précédente a toujours également lieu.

Pour déterminer les pressions des appuis E et F, nous observerons que, les appuis soutenant la machine entiere, les forces qui proviennent du poids P et de la puissance Q, doivent y passer, et y trouver leur destruction. Imaginons,

par chacun des points E et F, deux sections concentriques, et de plus paralleles et égales chacune à chacun des deux cercles ABD, MNK ; ces sections sont *abd*, *mnk*, pour le point E ; et $a'b'd'$, $m'n'k'$, pour le point F. Menons par les points A et N les droites aAa', nNn', paralleles à l'axe EF, et dont la premiere rencontre les circonférences *abd*, $a'b'd'$, aux points a, a' ; et la seconde rencontre les circonférences *mnk*, $m'n'k'$, aux points n, n'. Par les points a et a', menons les droites aq, $a'q'$, paralleles à AQ ; et par les points n et n', les droites np, $n'p'$ paralleles à NP. Enfin, tirons les rayons CA, Ea, Fa' ; ON, En, Fn'. Cette construction faite, je décompose le poids P en deux autres p, p', dirigés suivant np, $n'p'$; et la puissance Q en deux autres q, q', dirigées suivant aq, $a'q'$. Ainsi, à la place des deux forces P et Q, nous avons les quatre forces p, p', q, q'.

Maintenant, il est clair qu'en vertu des deux forces p, q, l'appui E souffre une pression égale à leur résultante ; et que pareillement, en vertu des deux forces p', q', l'appui F souffre une pression égale à leur résultante. Donc, si, après avoir mené les verticales Ez, Fs, et les droites Eh, Fm, paralleles à AQ, on représente p par Eg, q par Eh, p' par Fi, q' par Fm ; qu'ensuite on acheve les deux parallélogrammes Ehtg, Fmli : les diagonales Et, Fl, représenteront respectivement les pressions des deux appuis E et F. Or, les deux forces p, p', et leur résultante P, étant paralleles ; et de même les deux forces q, q', et leur résultante Q, étant paralleles : on a (45), $p = \frac{P \times Nn'}{nn'} = \frac{P \times OF}{EF}$, $p' = \frac{P \times Nn}{nn'}$ $= \frac{P \times OE}{EF}$, $q = \frac{Q \times Aa'}{aa'} = \frac{Q \times CF}{EF}$, $q' = \frac{Q \times Aa}{aa'} = \frac{Q \times CE}{EF}$. Ainsi, les forces p, p', q, q', seront connues, puisque les quantités P, Q, EF, OE, OF, CE, CF, sont toutes données. De plus, on connoît les angles Egt, Fil, qui sont égaux chacun à l'un des angles (donnés), que fait la direction de la puissance Q avec la verticale. Par conséquent, on a

toutes les données nécessaires pour résoudre, suivant les regles de la géométrie, chacun des triangles Egt, Fil, et déterminer les pressions cherchées Ft, Fl.

REMARQUE I.

197. Nous pouvons représenter les pressions par des formules générales très commodes, et qu'on appliquera sans peine à chaque cas particulier. Pour cela, décomposons les forces exprimées par Eh, Fm, chacune en deux autres Ex, Eu; Fy, Fr; l'une horizontale, l'autre verticale. De plus, menons les horizontales tz, ls. Il est évident que l'appui E supporte une pression horizontale représentée par Ex, une pression verticale représentée par Ez; et l'appui F, une pression horizontale représentée par Fy, une pression verticale représentée par Fs. Supposons

le sinus total . . . . $=1$,
le sinus de l'angle hEx, ou mFy, que fait la direction de la puissance Q avec l'horizon . . $=\lambda$,
le cosinus de cet angle . . . . $=\pi$,
la pression Et de l'appui E . . . . $=$E,
sa pression horizontale Ex . . . . $=e$,
sa pression verticale Ez . . . . $=e'$,
la pression Fl de l'appui F . . . . $=$F,
sa pression horizontale Fy . . . . $=f$,
sa pression verticale Fs . . . . $=f'$.

Cela posé, puisque E$h=q$, E$g=p$, F$m=q'$, F$i=p'$; et que d'un autre côté, Ex ou $zt=$ E$h\times\frac{\pi}{1}$, xh ou $gz=$ E$h \times\frac{\lambda}{1}$, F$y$ ou $sl=$ F$m\times\frac{\pi}{1}$, Fr ou $is=$ E$m\times\frac{\lambda}{1}$, E$t=\sqrt{[(tz)^2+(\text{E}z)^2]}$, F$l=\sqrt{[(ls)^2+(\text{F}s)^2]}$: on aura, $e=q\pi$; $e'=p+q\lambda$; $\text{E}=\sqrt{[q^2\pi^2+(p+q\lambda)^2]}$: $f=q'\pi$; $f'=p'+q'\lambda$; $\text{F}=\sqrt{[q'^2\pi^2+(p'+q\lambda)^2]}$.

Or on a déja trouvé, $p=\frac{\text{P}\times\text{OF}}{\text{EF}}$, $p'=\frac{\text{P}\times\text{OE}}{\text{EF}}$, $q=$

$\frac{Q \times CF}{EF}$, $q' = \frac{Q \times CE}{EF}$. Donc, en substituant ces valeurs dans les équations précédentes, on aura, $e = \frac{\pi Q \times CF}{EF}$; $e' = \frac{P \times OF + \lambda Q \times CF}{EF}$; $E = \frac{\sqrt{[(\pi Q \times CF)^2 + (P \times OF + \lambda Q \times CF)^2]}}{EF}$; $f = \frac{\pi Q \times CE}{EF}$; $f' = \frac{P \times OE + \lambda Q \times CE}{EF}$; $F = \ldots$ $\frac{\sqrt{[(\pi Q \times CE)^2 + (P \times OE + \lambda Q \times CE)^2]}}{EF}$.

Examinons avec quelque détail les conséquences qui résultent de ces formules.

Corollaire I.

198. La puissance Q étant supposée conserver toujours la même direction, les pressions horizontales e et f des appuis demeurent toujours les mêmes, en quelque endroit du cylindre que le poids soit appliqué, parceque toutes les quantités π, Q, CF, CE, EF, qui entrent dans les valeurs de ces pressions, sont constantes. De plus, à cause de $e + f = \frac{\pi Q \times (CF + CE)}{EF} = \pi Q$: il s'ensuit que *la somme des deux pressions horizontales des appuis est égale au produit de la puissance par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec l'horizon.* Cette expression est censée divisée par le sinus total qui est pris pour l'unité.

Corollaire II.

199. Les pressions verticales demeureroient aussi toujours les mêmes, si le poids répondoit toujours au même point O de l'axe. Mais comme la corde a un certain diametre, et que les rangs de corde se placent les uns à côté des autres sur le cylindre, il est clair qu'à mesure que le poids monte, le point O change de place. D'où il suit que les valeurs des deux pressions e' et f' changent aussi. Mais leur somme est toujours une quantité constante. Car $e' + f' = \frac{P \times (OF + OE) + \lambda Q \times (CF + CE)}{EF} = P + \lambda Q$.

Ainsi *la somme des deux pressions verticales des appuis est égale à la somme du poids, et du produit de la puissance par le sinus de l'angle qu'elle fait avec l'horizon, divisé par* 1, *qui est le sinus total.*

COROLLAIRE III.

200. QUANT aux pressions résultantes E, F, elles ne sont pas les mêmes en général, comme on le voit par leurs valeurs données ci-dessus.

De plus, il est évident que ces mêmes forces E, F, ne seront dirigées dans un même plan que quand les deux triangles Ezt, Fsl, seront semblables, et que par conséquent on aura la proportion, Ez:zt :: Fs:sl. Supposons que cette proportion ait lieu en effet, ou, ce qui revient au même, qu'on ait,

$$\frac{P \times OF + \lambda Q \times CF}{EF} : \frac{\pi Q \times CF}{EF} :: \frac{P \times OE + \lambda Q \times CE}{EF} : \frac{\pi Q \times CE}{EF};$$

nous tirerons de là l'équation, $\pi \times OF \times CE = \pi \times OE \times CF$; ou $\pi \times OF \times CE - \pi \times OE \times CF = 0$, qui donne, ou $\pi = 0$, ou $OF \times CE - OE \times CF = 0$.

Dans le premier cas, c'est-à-dire, lorsque $\pi = 0$, la direction de la puissance est verticale; les pressions horizontales des appuis s'évanouissent : il ne reste plus que les deux pressions verticales, qui sont dans le plan vertical, passant par l'axe EF.

Dans le second cas, où π étant une quantité finie, on auroit $OF \times CE - OE \times CF = 0$, ou $(EF - OE) \times CE - OE \times (EF - CE) = 0$; ou $OE = CE$, on voit que la direction de la puissance Q n'étant pas verticale, les deux pressions résultantes contre les appuis ne sont dans un même plan que quand le poids et la puissance sont dans un même plan perpendiculaire à l'axe EF.

Ainsi *les pressions résultantes contre les appuis, ne sont dans un même plan que quand le poids et la puissance ont des directions, ou parallèles, ou situées dans un même plan.*

vertical, *perpendiculaire à l'axe*. Ce qui comprend aussi le cas où l'on auroit tout à la fois $\varpi = 0$, $OE = CE$.

COROLLAIRE IV.

201. LORSQUE la direction de la puissance Q est verticale, et que par conséquent $\varpi = 0$, $\lambda = 1$: on a, $e = 0$; $e' = E = \frac{P \times OF + Q \times CF}{EF}$; $f = 0$; $f' = F = \frac{P \times OE + Q \times CE}{EF}$.

Ainsi il n'y a plus de pressions horizontales, comme nous l'avons déja remarqué ; et *on aura la pression verticale d'un appui, en multipliant le poids et la puissance, chacun par la partie de l'axe qui lui répond, et située du côté de l'autre appui ; ajoutant ensemble les deux produits, et divisant la somme par l'axe.*

COROLLAIRE V.

202. SUPPOSONS que la puissance Q tire horizontalement, on aura, $\lambda = 0$, $\varpi = 1$. Par conséquent, $e = \frac{Q \times CF}{EF}$; $e' = \frac{P \times OF}{EF}$; $E = \frac{\sqrt{[(Q \times CF)^2 + (P \times OF)^2]}}{EF}$; $f = \frac{Q \times CE}{EF}$; $f' = \frac{P \times OE}{EF}$; $F = \frac{\sqrt{[(Q \times CE)^2 + (P \times OE)^2]}}{EF}$.

Il est facile de traduire ces expressions en langage ordinaire. Je ne les traduis point, pour éviter la prolixité.

Le lecteur fera aisément d'autres applications de ces formules.

COROLLAIRE VI.

203. NOUS n'avons fait entrer dans les valeurs des pressions des appuis que le poids P et la puissance Q. Si on y veut faire entrer aussi le poids du cylindre et de la roue, cela sera facile. Car, imaginant ce poids réuni à son centre de gravité, il ne s'agira que de le décomposer en deux forces qui passent par les appuis, et qui s'ajoutent aux forces p, p';

ensuite on emploiera ces deux sommes, comme on a employé ci-dessus p, p'.

SCHOLIE.

204. On voit en général que, relativement à la maniere dont le poids et la puissance sont disposés et se contrebalancent mutuellement, l'effet du tour revient à celui d'un levier de la premiere espece. Ainsi la remarque que nous avons faite (151) au sujet de ce levier, s'applique également au tour; je veux dire que si, dans l'état d'équilibre, la puissance est moindre que le poids, et cela dans le rapport du rayon du cylindre à celui de la roue : aussi, dans l'état de mouvement, la puissance marche plus vîte que le poids, et cela dans le rapport du rayon de la roue à celui du cylindre.

PROPOSITION II. PROBLÊME.

205. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre, lorsque plusieurs poids et plusieurs puissances sont appliqués à la fois à un tour.*

Supposons, pour envisager la question encore plus généralement, une machine composée de plusieurs roues et de plusieurs cylindres, qui, ayant un axe commun, ont d'ailleurs des rayons quelconques; qu'aux extrémités des rayons R, R', R'', R''', etc. des roues, agissent les puissances Q, Q', Q'', Q''', etc.; et aux extrémités des rayons r, r', r'', r''', etc. des cylindres, les poids P, P', P'', P''', etc. On aura, dans le cas d'équilibre, $Q \times R + Q' \times R' + Q'' \times R'' + Q''' \times R''' + \text{etc.} = P \times r + P' \times r' + P'' \times r'' + P''' \times r''' + \text{etc.}$ Car il faut que la somme des moments des forces Q, Q', Q'', etc., qui tendent à faire tourner la machine dans un sens autour de l'axe, soit égale à la somme des moments des forces P, P', P'', etc., qui tendent à la faire tourner, dans le sens contraire, autour du même axe.

A l'égard des pressions des appuis, elles se détermineront

ainsi. Commencez par décomposer chacune des forces P, P', P'', etc., et chacune des forces Q, Q', Q'', etc., comme on a décomposé ci-dessus les deux forces P et Q : réduisez toutes les forces qui proviennent à chaque appui, à deux sortes de forces, les unes horizontales, les autres verticales ; prenez les sommes ou les résultantes de ces forces horizontales et verticales ; et cherchez la résultante de ces deux résultantes : elle exprimera la pression de l'appui que vous considérez.

Du Cric.

206. Le cric simple (Fig. 104) est composé d'une barre AB, garnie à l'une de ses faces de dents de fer, et mobile dans une chasse CE. Les dents de la barre AB engrenent avec celles d'une petite roue ou *pignon* DD, qu'on fait tourner sur son axe, au moyen de la manivelle NM. Les dents du pignon soulevent la barre, et font par conséquent monter un poids placé sur sa tête A.

En considérant l'effort que chaque dent du pignon fait en D pour soulever la barre, comme un poids à élever, il est clair (196) que la puissance, appliquée à la manivelle, est à ce poids, comme le rayon du pignon est au bras NM de la manivelle : d'où l'on voit qu'en faisant le rayon du pignon très petit par rapport à celui de la manivelle, on peut, avec une force médiocre, élever un poids très considérable.

Quelquefois, pour soulever un plus grand poids avec la même force appliquée à la manivelle, on emploie dans le cric plus d'un pignon. Alors l'effet du cric est le même que celui des roues dentées, que nous allons expliquer.

Des Roues dentées.

207. Tout le monde connoît la figure des roues dentées. On sait que les dents sont des parties saillantes par lesquelles les roues engrenent les unes avec les autres, et se transmettent l'action de la force motrice. Ces roues sont d'un

grand usage dans les moulins, et en général dans toutes les machines mues par le courant d'un fluide, et dans celles où le principe moteur ne peut pas être appliqué immédiatement à la place même où il doit opérer son effet. Ordinairement on assemble sur un même arbre, et dans des plans différents, une grande roue, et une petite, autrement nommée *pignon*, dont les dents ou *ailes* engrenent avec les dents d'une autre roue. Dans les grandes machines, on substitue souvent aux pignons des *lanternes* (Fig. 105), qui ne sont autre chose que des cylindres assemblés parallèlement entre eux dans des plateaux M, N: alors les dents de la roue engrenent avec les fuseaux de la lanterne, comme elles feroient avec les ailes d'un pignon. Le mécanisme revient absolument au même dans les deux cas. Contentons-nous donc d'examiner l'engrenage des roues et des pignons.

PROPOSITION III. PROBLÈME.

208. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre entre plusieurs roues et plusieurs pignons qui engrenent ensemble.*

Soient trois roues A, B, C (Fig. 106), et leurs pignons correspondants a, b, c. Le pignon, ou plutôt le cylindre a, soutient un poids P; la roue A, qui a le même arbre que lui, engrene avec le pignon b; la roue B, qui a même arbre que le pignon b, engrene avec le pignon c; la roue C, qui a même arbre que ce pignon, est tirée à sa circonférence par la puissance Q, et tout le système est en équilibre. Nommons R, R', R'', les rayons des roues; r, r', r'', ceux des pignons; E l'effort de la roue A contre le pignon b; E' l'effort de la roue B contre le pignon c. En regardant l'effort reçu par chaque pignon, comme un poids qui lui est appliqué, il est évident (196) qu'on aura ces trois proportions :

$$P:E::R:r,$$
$$E:E'::R':r',$$
$$E':Q::R'':r'',$$

lesquelles, étant multipliées par ordre, donnent,

$$P:Q::R \times R' \times R'':r \times r' \times r''.$$

D'où il suit que *le poids* P *est à la puissance* Q, *comme le produit des rayons des roues est au produit des rayons des pignons.*

Il en seroit de même, s'il y avoit un plus grand nombre de roues et de pignons.

On voit par-là que ces sortes de machines peuvent donner un très grand avantage à la puissance sur le poids, relativement à la force; mais cet avantage est acquis aux dépens du temps, lorsque la machine passe du repos au mouvement.

Proposition IV. Problême.

209. Déterminer *les nombres de dents et d'ailes que doivent avoir plusieurs roues et plusieurs pignons qui engrenent ensemble, pour faire des nombres donnés de révolutions, dans des temps donnés.*

Ce problême n'appartient pas proprement à la statique; mais il est souvent utile dans la composition des machines, principalement dans l'horlogerie; et j'ai cru en conséquence devoir le traiter avec quelque détail.

I.

Soient les roues A, B, C, D (Fig. 107), dont la premiere engrene avec le pignon *b* fixé à la seconde; celle-ci engrene avec le pignon *c* fixé à la troisieme, ainsi de suite. Désignons par A, B, C, D, les nombres des dents des roues, et par *b*, *c*, *d*, *e*, les nombres des ailes des pignons. De plus, nommons N, N', N'', N''', les nombres de tours que les quatre roues font dans le même temps; ceux des trois pignons *b*, *c*, *d*, qui ne font chacun qu'un même corps avec chacune des trois roues B, C, D, seront représentés par N', N'', N''', respectivement; nous désignerons par N^{iv} le nombre de tours du dernier pignon *e*. Cela posé, il est clair

que le nombre des dents de la roue A, engrenées pendant chaque tour, étant exprimé par A, le nombre de dents qu'elle engrenera pendant le nombre N de tours, sera exprimé par $A \times N$. De même; le nombre d'ailes engrenées par le pignon b, avec la roue A, pendant le nombre N de révolutions, sera représenté par $b \times N'$. Or, pendant le même temps, il s'engrene autant de dents de la roue A que d'ailes du pignon b. Ainsi on a l'équation $A \times N = b \times N'$. On a, par la même raison, les équations $B \times N' = c \times N''$, $C \times N'' = d \times N'''$, $D \times N''' = e \times N^{IV}$. Ces différentes équations donnent les proportions :

$$N:N'::b:A,$$
$$N':N''::c:B,$$
$$N'':N'''::d:C,$$
$$N''':N^{IV}::e:D,$$

lesquelles, étant multipliées par ordre, donnent,

$$N:N^{IV}::b \times c \times d \times e:A \times B \times C \times D;$$

c'est-à-dire que *le nombre des tours de la premiere roue* A, *est au nombre des tours du dernier pignon* e, *comme le produit du nombre des ailes des pignons est au produit du nombre des dents des roues.*

II.

Cette proportion donne l'équation $\frac{N}{N^{IV}} = \frac{b \times c \times d \times e}{A \times B \times C \times D}$, par laquelle on voit que N et N^{IV} étant donnés, rien ne détermine les nombres d'ailes et de dents que chaque pignon et chaque roue doivent avoir en particulier. Il suffit que le rapport du produit de toutes les ailes au produit de toutes les dents, soit le même que celui de N à N^{IV}. Supposons, par exemple, que la roue A faisant un tour pendant un certain temps, le pignon e en fasse deux; c'est-à-dire; $\frac{N}{N^{IV}} = \frac{1}{2}$. On aura, $\frac{1}{2} = \frac{b \times c \times d \times e}{A \times B \times C \times D}$, ou $A \times B \times C \times D = 2 \times b \times c \times d \times e$. Donc, si l'on donne arbitrairement 6 ailes au premier pignon, 8 au second, 10 au troisieme,

12 au quatrieme, on aura, $A \times B \times C \times D = 2 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 = 11520$, nombre qu'il faudra décomposer en quatre facteurs, qui seront les nombres des dents des quatre roues A, B, C, D. On peut prendre, pour ces quatre facteurs, ou les quatre nombres 12, 8, 10, 12, ou les quatre nombres 6, 16, 5, 24, ou, etc. L'arrangement des roues et des pignons est indifférent. Si on avoit commencé par se donner les nombres des dents des roues, on auroit trouvé d'une maniere semblable les nombres des ailes des pignons.

III.

Souvent le nombre que l'on a pour le produit total des dents des roues, ou des ailes des pignons, ne peut pas se décomposer en facteurs, qui puissent être les nombres des dents ou des ailes, des roues ou des pignons, en particulier : alors le problême n'est pas susceptible d'une solution rigoureuse ; mais il faut se contenter d'une solution approchée.

Supposons, par exemple, qu'on ait (Fig. 108) les trois roues A, B, C, et les trois pignons b, c, d; que la premiere roue A fasse un tour en un an, et le dernier pignon d un tour en 12 heures. On aura d'abord l'équation generale, $\frac{N}{N'''} = \frac{b \times c \times d}{A \times B \times C}$.

L'année commune est de 365 jours 5 heures 49 minutes, ou de 525949 minutes, et 12 heures valent 720 minutes. Or, puisque le dernier pignon d fait un tour en 720 minutes, il est clair que, pour avoir le nombre N''' de révolutions qu'il fera en un an, ou pendant un tour de la roue A, il faut faire cette proportion, $720 : 525949 :: 1 : N'''$. Donc $N''' = \frac{525949}{720}$, tandis que $N = 1$. On aura donc $\frac{N}{N'''} = \frac{720}{525949} = \frac{b \times c \times d}{A \times B \times C}$; et par conséquent $A \times B \times C \times 720 = b \times c \times d \times 525949$; ou $A \times B \times C = \frac{b \times c \times d \times 525949}{720}$.

Comme le nombre des ailes de chaque pignon, et celui des dents de chaque roue, doivent être des nombres entiers, il faut que le produit $b \times c \times d$ soit un nombre entier, et que la fraction $\frac{b \times c \times d \times 525949}{720}$ en soit aussi un, ou que son numérateur soit divisible par son dénominateur. Il faut de plus que le quotient, provenant de cette division, soit décomposable en trois facteurs, qui puissent être les nombres des dents des trois roues. En faisant $b \times c \times d = 720$, ce nombre est décomposable en trois facteurs, 8, 9, 10, qu'on peut prendre pour b, c, d; mais alors on auroit $A \times B \times C = 525949$, nombre qui n'est pas décomposable en facteurs qu'on puisse prendre pour A, B, C. La même difficulté subsiste, en prenant pour le produit $b \times c \times d$ un multiple quelconque de 720. Le problême n'est donc pas soluble à la rigueur; mais voici comment on peut le résoudre d'une maniere approchée, en suivant l'esprit de la méthode que nous avons donnée dans le *Traité d'Algebre*.

IV.

Le numérateur de la fraction $\frac{b \times c \times d \times 525949}{720}$ étant très grand par rapport à son dénominateur, cette fraction ne changera pas sensiblement de valeur, si, sans toucher à son dénominateur, l'on augmente ou l'on diminue son numérateur d'un petit nombre d'unités. Prenons donc à sa place la fraction $\frac{b \times c \times d \times 525949 + m}{720}$, m étant un nombre entier très petit, positif ou négatif: nous aurons sensiblement, $A \times B \times C = \frac{b \times c \times d \times 525949 + m}{720}$; ou $A \times B \times C = b \times c \times d \times 730 + \frac{b \times c \times d \times 349 + m}{720}$. Or la premiere partie est un nombre entier; la seconde $\frac{b \times c \times d \times 349 + m}{720}$ en sera donc aussi un, que je nomme n. On aura ainsi, $\frac{b \times c \times d \times 349 + m}{720}$

$=n$; ou $b \times c \times d = 2n + \frac{22n - m}{349}$, dont la premiere partie étant un nombre entier, la seconde en sera aussi un, que je nomme p. Par-là on aura, $\frac{22n - m}{349} = p$, ou $n = 15p + \frac{19p + m}{22}$, nombre entier. Soit $\frac{19p + m}{22} = q$, nombre entier; on aura $p = q + \frac{3q - m}{19}$, nombre entier. Soit $\frac{3q - m}{19} = r$, nombre entier; on aura, $q = 6r + \frac{r + m}{3}$, nombre entier. Soit $\frac{r + m}{3} = s$, nombre entier; on aura, $r = 3s - m$.

Maintenant il faut rétrograder, et, par le moyen de cette derniere équation, déterminer les valeurs des lettres r, q, p, n. Or, comme l'équation $r = 3s - m$ renferme trois indéterminées, on peut en prendre deux à volonté, en observant seulement qu'elles soient des nombres entiers, et que m soit un petit nombre. Toutes les suppositions qui donneront pour $b \times c \times d$ un nombre décomposable en trois facteurs, qui puissent être les nombres des ailes des pignons, et pour $A \times B \times C$ un nombre décomposable en trois facteurs, qui puissent être les nombres des dents des roues; toutes ces suppositions, dis-je, seront admissibles.

Soient, par exemple, $m = -1$, $s = 0$. On aura, $r = 1$, $q = 6$, $p = 7$, $n = 111$. Donc $b \times c \times d = 229$, nombre qui n'est pas décomposable en facteurs, qu'on puisse prendre pour b, c, d. La supposition proposée n'est donc pas convenable. Plusieurs autres, comme celles de $m = -2$, $s = 0$, $m = 1$, $s = 0$, etc., ne le sont pas davantage; mais celle de $m = -4$, $s = -1$, peut être employée. Car alors on a, $r = 1$, $q = 5$, $p = 6$, $n = 95$. Donc $b \times c \times d = 196$, nombre qu'on peut décomposer en ces trois facteurs, 4, 7, 7, qui peuvent être les nombres des ailes des trois pignons. Mettons pour m, et $b \times c \times d$, leurs valeurs, dans l'équation $A \times B \times C = \frac{b \times c \times d \times 525949 + m}{720}$; elle de-

viendra A × B × C = 143175, nombre décompo able en ces trois facteurs, 25, 69, 83, qui peuvent être les nombres des dents des trois roues. Ainsi, en donnant 4 ailes à un pignon, 7 ailes à un autre, 7 ailes au troisieme; 25 dents à une roue, 69 à une autre, 83 à la troisieme : le problême sera résolu, et il s'en faudra très peu de chose que, le dernier pignon faisant un tour en 12 heures, la premiere roue fasse un tour en un an.

Si on veut connoître combien il s'en faudra que la premiere roue fasse un tour en un an, cela est aisé : car, en nommant x le temps de la révolution de cette roue, il est clair qu'on a, $\frac{720'}{x} = \frac{4 \times 7 \times 7}{25 \times 69 \times 83}$, ou $x = 525948' \frac{48}{49} =$ $365^j, 5^h 48' \frac{48}{49}$.

V.

Il est à propos de faire à ce sujet une observation qui abrégera le calcul en plusieurs cas.

Comme dans l'équation approchée A × B × C = $\frac{b \times c \times d \times 525949 + m}{720}$, le dénominateur 720 est un nombre composé de plusieurs facteurs, qu'on peut prendre pour un, ou pour deux des trois nombres b, c, d, le probléme peut se simplifier et se résoudre comme il suit.

Soit, par exemple, $b = 8$, qui est un facteur de 720, et prenons $c = 7$: la question sera de satisfaire à l'équation A × B × C = $\frac{7 \times 525949 \times d + m}{90}$, ou A × B × C = $\frac{3681643 \times d + m}{90}$; et on voit qu'il suffit de trouver pour l'inconnue d un nombre entier convenable, et tel que la quantité $\frac{3681643 \times d + m}{90}$ soit aussi un nombre entier, décomposable en trois facteurs, qu'on puisse prendre pour A, B, C.

Soient $b = 8$, $c = 9$ (ces deux nombres sont des facteurs de 720), la question sera de satisfaire à l'équation A × B × C = $\frac{525949 \times d + m}{10}$, de maniere que d soit un nombre

entier convenable, et que la quantité $\frac{525949 \times \overline{d+m}}{10}$ soit aussi un nombre entier, décomposable en trois facteurs, qu'on puisse prendre pour A, B, C.

Soient $b = 6$, $c = 8$ (nombres qui sont encore des facteurs de 720) : il s'agira de satisfaire à l'équation $A \times B \times C = \frac{525949 \times \overline{d+m}}{15}$, toujours suivant la condition énoncée.

Il en est de même pour d'autres suppositions. Tous ces problèmes se résolvent facilement par la méthode proposée.

Mécanisme des Fusées de montres.

210. Il y a des machines qui se meuvent par un mécanisme semblable à celui du tour, mais dans lesquelles l'action de la force motrice est variable. Alors, la résistance à vaincre étant supposée constante, on applique la force motrice à des bras de leviers variables, et qui deviennent plus ou moins longs, selon que cette force diminue ou augmente. Tel est le mécanisme des horloges à *ressorts* ou des *montres* ordinaires. Le principe moteur de ces machines est une lame élastique d'acier, pliée spiralement sur elle-même, et enfermée dans un *barillet* AB (Fig. 109), qui est traversé par un arbre immobile OV, autour duquel il a la liberté de tourner. Cette lame est fixée par l'un de ses bouts à l'arbre OV, et par l'autre à la surface concave du barillet. Une chaîne CDE est arrêtée par un bout au barillet, et par l'autre à la *fusée* MKLI de forme conique; l'arbre FG de cette fusée la traverse quarrément, et peut être censé ne faire avec elle qu'un même corps. Pour *monter* la montre, c'est-à-dire pour la mettre en activité, on fait tourner la fusée dans un certain sens (par exemple ici de gauche à droite), au moyen d'une *clé*, qu'on applique à la tête G de son arbre; en même temps la chaîne fait tourner le barillet autour de son axe OV qu'une roue d'arrêt empêche de tourner; la lame spirale se plie autour de ce même axe, et par-là sa force élastique augmente, de sorte

que le ressort est dans sa plus grande tension, lorsque la chaîne répond au plus petit diametre MI de la fusée. Quand la montre est entièrement montée, ou quand toute la fusée est couverte par la chaîne, on retire la clé : alors le barillet tourne en sens contraire en vertu du ressort spiral; il fait tourner dans ce nouveau sens la fusée ; et la roue KL, fixée à cette fusée, transmet le mouvement à tout le rouage dont la montre est composée. A mesure que le ressort se déploie, et que par conséquent sa force élastique diminue, la chaîne est appliquée à de plus grands rayons de la fusée, et agit par ce moyen à l'extrémité de plus grands bras de levier; ce qui produit une compensation, et fait que le moment de la force motrice, par rapport à l'axe FG de la fusée, est toujours le même, du moins sensiblement.

PROPOSITION V. PROBLÊME.

211. DÉTERMINER *la figure qu'il faut donner à la fusée d'une montre.*

Cette figure est à-peu-près celle d'un cône tronqué, à bases paralleles. Si l'on connoissoit exactement la loi suivant laquelle la force du ressort varie, il seroit facile de déterminer la figure précise que la fusée devroit avoir, pour que le moment de la force motrice, par rapport à l'axe FG, fût constamment le même, et que par conséquent le mouvement de rotation de la fusée demeurât toujours uniforme. Supposons, par exemple, que les différentes forces du ressort, à mesure qu'il se déploie, soient représentées par les ordonnées FS, TV, GQ, etc. (Fig. 110) du triangle rectangle RFS ; que FG soit la hauteur donnée de la fusée ; FO, sa premiere ordonnée, qui est aussi connue ; TX, une ordonnée indéterminée de la courbe OXP, dont on cherche la nature. Nommons

FO . . . . a,
FG . . . . b,
FT . . . . x,

TX . . . . y,
FR . . . . m,
la force du ressort en F . . . . P.

Il est évident que la force du ressort en T sera représentée par $P \times \frac{RT}{RF}$, c'est-à-dire par $\frac{P(m-x)}{m}$, et que son moment, relativement à l'axe FG, sera exprimé par $\frac{P(m-x)}{m} \times y$. Or, puisque ce moment doit toujours être constant, il sera le même que celui qui répond au point F. On aura donc $\frac{P(m-x)y}{m} = Pa$, ou bien $my - xy = ma$, qui est l'équation d'une hyperbole équilatere, qui a pour centre le point R, et pour asymptotes les droites RF, RZ, perpendiculaires entre elles.

En faisant $x = b$, on a y ou $GP = \frac{ma}{m-b}$, expression de la derniere ordonnée de la fusée.

Quant à la hauteur m du triangle RFS, elle se détermine par la connoissance des forces du ressort en deux points différents. Ainsi, ayant nommé P la force du ressort en F, si l'on nomme P' la force du ressort en G, on aura, $P : P' :: m : m - b$. D'où l'on tire $m = \frac{bP}{P - P'}$. Substituons cette valeur de m dans l'équation $my - xy = ma$, nous aurons, $\frac{bPy}{P - P'} - xy = \frac{bPa}{P - P'}$.

On détermineroit d'une maniere analogue la figure de la fusée, dans toute autre hypothese sur la variation des forces du ressort. Le problême n'a jamais d'autres difficultés que celles qui peuvent tenir à l'imperfection de l'analyse, et à l'ignorance où nous sommes de la loi précise, suivant laquelle le ressort déploie son action.

Remarque.

212. Camus a imité le mécanisme des fusées de montre

dans une machine qu'il propose (1) pour tirer de l'eau d'un puits profond, ou des pierres du fond des carrieres et des mines. Elle est composée des deux bobines coniques et égales ACBH, KEBH (Fig. 111), qui ont le même axe horizontal FD, et qui sont adossées par leurs plus grandes bases. Deux cordes qui se roulent en sens contraires sur ces bobines, soutiennent deux seaux, dont l'un monte pendant que l'autre descend. Chaque seau, lorsqu'il est prêt à se vuider, ou qu'il vient immédiatement d'être vuidé, est appliqué au plus grand rayon de sa bobine; l'autre seau, qui est alors au fond du puits, et qui est vuide ou plein, est appliqué au plus petit rayon de sa bobine. La machine est mue par un homme qui marche dans la roue M, et qui, changeant alternativement la direction de son mouvement, se trouve toujours placé du côté du seau qui descend.

On voit que les poids des cordes, étant nécessairement assez considérables, doivent entrer en ligne de compte dans le calcul de la machine; et que la figure rigoureuse de chaque bobine devroit être telle que, dans une position indéterminée des deux seaux, il y eût équilibre, sans que le poids de l'homme cessât d'agir exactement suivant la même ligne verticale. Il s'en faut très peu de chose que cette condition ne soit remplie, lorsque les deux bobines ont la forme de cônes tronqués. Ainsi cette figure, qui est d'ailleurs la plus commode à exécuter, peut être employée dans la pratique, sans craindre d'erreur sensible. Nous allons chercher, en conséquence, les rayons extrêmes que les bobines doivent avoir, pour que le moment du poids de l'homme soit le même, quand un seau est prêt à se vuider, l'autre étant au fond du puits, et prêt à s'emplir; et quand, le premier seau venant d'être vuidé, l'homme a changé de place pour faire monter le second qui s'est empli pendant

(1) Mém. de l'Académie, année 1739, Cours de Mathématiques, tome IV, page 163.

que le premier se vuidoit. L'équilibre, établi pour ces deux cas extrêmes, aura aussi lieu, du moins sensiblement, dans les cas intermédiaires.

I.

Soit en général le poids de chaque seau vuide . . S,
le poids de l'eau que chaque seau peut contenir . . E,
le poids de la corde qui soutient un seau, quand elle est entièrement développée . . . . C,
le plus grand rayon OB de chaque bobine . . . R,
le plus petit rayon DC ou FE . . . . r,
le poids de l'homme . . . . H,
son bras de levier, c'est-à-dire la distance de sa direction à la verticale zu . . . . a.

Cela posé, imaginons que l'un Q des seaux soit plein et au haut du puits, l'autre P étant encore vuide, et au fond du puits; il est clair qu'alors l'homme est du côté du seau P, et qu'on a l'équation, $(S+E) \times R = (S+C) \times r + H \times a$.

Que, le seau Q étant vuidé, l'homme change de place pour faire monter le seau P, qui s'est rempli: on aura cette équation, $S \times R + H \times a = (S + C + E) \times r$.

Dégageant les deux inconnues R et r, on trouvera,

$$R = \frac{2HaS + HaE + 2HaC}{2E.S + E^2 + E.C};$$

$$r = \frac{2HaS + HaE}{2E.S + E^2 + E.C}.$$

II.

Il ne suffit pas de connoître les rayons R et r, pour être en état de construire les deux cônes tronqués ACBH, KEBH; il faut de plus connoître, ou leur hauteur, ou le côté BC ou BE. Or, si l'on nomme L la longueur entiere de chaque corde, D son diametre, N le nombre de tours de corde, qui couvrent chaque bobine, $\frac{\pi}{1}$ le rapport de la

circonférence au diametre; et si l'on considere que les longueurs de corde, nécessaires pour faire les différents tours, croissent en progression arithmétique, depuis la premiere longueur, qui est $2r \times \pi$, jusqu'à la derniere qui est $2R \times \pi$; il est clair qu'on aura, $L = N \times (R + r) \times \pi$, ou $N = \frac{L}{(R+r)\pi}$. Mais, d'un autre côté, on a évidemment BC ou $BE = N \times D$. On aura donc, BC ou $BE = \frac{L \times D}{(R+r)\pi}$.

Par le moyen de R, r, BC, on connoîtra la hauteur OD; car il est clair qu'on a, $OD = \sqrt{\left[\left(\frac{D \times L}{(R+r)\pi}\right)^2 - (R-r)^2\right]}$ Ainsi, on est en état de construire chaque bobine.

III.

Il nous reste à observer, au sujet de l'homme qui fait tourner la roue M, que, pour pouvoir marcher commodément et sans trop se fatiguer, il doit s'éloigner médiocrement du rayon vertical zu. L'expérience fait voir que si, par le point où la direction du poids de cet homme rencontre la circonférence, on mene la tangente fh, et qu'ensuite on tire l'horizontale hn; la rampe hf ne sera pas trop roide, pourvu que sa hauteur fn n'excede pas la sixieme partie de sa longueur fh. Supposons donc $fn = \frac{fh}{6}$; menons le rayon zf, et l'horizontale zg. Les deux triangles fnh, zgf, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, et qui sont par conséquent semblables, donnent, $fn : fh :: zg : zf$. Donc, à cause de $fn = \frac{fh}{6}$, on aura aussi, $zg = \frac{zf}{6}$. Ainsi, le bras de levier zg du poids de l'homme est la sixieme partie du rayon de la roue. De plus, nous observerons que, la hauteur d'un homme pouvant être d'environ $5\frac{1}{2}$ pieds, on doit donner au moins 6 pieds de rayon à la roue, pour que l'homme en marchant ne se heurte pas la tête contre l'arbre de la roue, qui peut avoir environ 1 pied de diametre.

Je laisse au lecteur le soin d'appliquer cette théorie générale à des exemples particuliers ; et je me contente d'avertir que le poids d'un homme ordinaire est d'environ 150 livres ; qu'un pied cube d'eau douce pese 70 livres à très peu près ; qu'une corde de chanvre de 1 pouce de diametre pese environ 2 livres sur six pieds de longueur.

IV.

Dans le calcul de cette machine, l'on suppose que le seau, qui est au fond du puits ou dans l'eau, agit de tout son poids sur la bobine à laquelle sa corde est attachée, et que l'eau contenue dans ce même seau agit aussi alors par son poids sur la corde. Or le poids du seau n'agit réellement que par son excès sur le poids du volume d'eau dont il occupe la place ; et l'eau, contenue dans ce seau, ne tire point du tout sur la corde, tant que le seau est plongé dans l'eau du puits : mais, comme le seau ne demeure que très peu de temps dans l'eau, l'inexactitude de ces deux suppositions altere peu les résultats précédents ; et d'ailleurs on peut y obvier, en imaginant que l'homme, placé du côté de l'autre seau, se rapproche un peu de la verticale *zu*, pendant que le seau dont il s'agit sort de l'eau.

V.

Cette même machine a l'inconvénient d'occuper une place assez considérable. Il est clair que, pour pouvoir l'employer, le diametre du puits doit être plus grand que le double de la longueur d'une bobine, plus le diametre d'un seau garni de son armature. Or il arrive très souvent que cela n'a pas lieu. Alors, au lieu de deux bobines coniques, on peut employer deux bobines cylindriques (Fig. 112), sur lesquelles les cordes font plusieurs tours concentriques les uns sur les autres. Connoissant le rayon de chaque bobine à nu, et le rayon qu'on veut qu'elle ait quand sa corde

est entièrement enveloppée, on déterminera, par des procédés analogues à ceux de l'article 11, la longueur de la bobine; ou bien, connoissant toujours le rayon à nu de chaque bobine, et la longueur qu'on peut donner à l'une et à l'autre, on trouvera les rayons qu'elles ont, lorsque les cordes sont entièrement roulées. Il est évident que ces bobines cylindriques occupent moins de largeur que les bobines coniques, puisqu'on est maître de ne donner aux premieres que la longueur simplement requise pour que les seaux ne se rencontrent point, et ne se gênent pas dans leurs mouvements.

SECTION V.

Du Plan incliné.

213. On appelle en général *plan incliné* tout plan qui fait un angle avec l'horizon. Cet angle peut être infiniment petit, et alors le plan incliné se confond avec l'horizon; ou bien être droit, et alors le plan devient vertical. Entre ces deux cas extrêmes, sont comprises toutes les autres especes d'inclinaisons.

Le plan incliné sert dans la mécanique à soutenir une partie de la pesanteur des corps, ou à s'aider d'une partie de cette force, soit pour diriger les mouvements vers un certain but, soit pour les modérer à volonté. Commençons l'examen des lois de l'équilibre dans cette machine, par les cas les plus simples.

Proposition I. Problême.

214. Qu'un *corps* P (Fig. 113), *tenu en équilibre sur le plan incliné et fixe* MN, *au moyen d'une force* Q *dirigée suivant* QP, *s'appuie par un seul point* A *sur ce plan.*

Il est clair, 1°. que la direction de la force Q passera nécessairement par le point A, afin que cette force puisse être détruite; 2°. qu'elle sera perpendiculaire au plan MN; autrement la force se décomposeroit en deux autres, l'une perpendiculaire au plan, qui seroit détruite, l'autre parallele au plan, qui imprimeroit du mouvement au corps. Ces deux conditions sont essentielles à la fois pour l'équilibre.

La force Q peut être la résultante de plusieurs autres forces particulieres appliquées au corps. Ainsi concluons en général, que si un corps, soumis à l'action de tant de forces qu'on voudra, demeure en équilibre sur un plan qu'il ne touche que par un seul point, la résultante de toutes ces forces passera nécessairement par le point d'appui, et y sera perpendiculaire au plan.

Corollaire.

215. Il suit de là que si un corps, soumis à la seule action de sa pesanteur, demeure en équilibre sur un plan, en s'y appuyant par un seul point, ce plan est nécessairement horizontal, et que de plus le point d'appui est placé dans la verticale abaissée par le centre de gravité du corps.

Proposition II. Problème.

216. Que *le corps* P (Fig. 114), *soumis à l'action de la force* Q, *simple, ou résultante de plusieurs autres forces, demeure en équilibre sur le plan* MN, *en s'y appuyant par les deux points* O *et* K.

Il n'est pas nécessaire ici que la direction de la force Q passe par l'un des appuis, il suffit que cette force puisse se décomposer en deux autres qui passent par les appuis O et K, et qui y soient perpendiculaires au plan. Or, en général, une force et ses deux composantes sont dans un même plan. Donc la direction de la force Q rencontre nécessairement la droite OK; et, de plus, elle est perpendiculaire au plan MN,

puisque les deux forces dans lesquelles cette force se décompose sont perpendiculaires à ce même plan.

On voit donc qu'un corps, appuyé par deux points sur un plan, ne peut demeurer immobile, à moins que la force qui pousse ce corps ne soit dirigée perpendiculairement au plan, et qu'elle ne rencontre la droite qui joint les deux points d'appui, laissant l'un de ces points à gauche, l'autre à droite.

Il en est de même de l'équilibre d'un corps appuyé par plus de deux points sur un plan incliné. Ce corps ne demeurera immobile que quand la force à laquelle il sera soumis sera perpendiculaire au plan, et qu'elle pourra se décomposer en forces qui passent par les points d'appui, et qui y soient perpendiculaires au plan. Les forces composantes seront placées en partie d'un côté, en partie de l'autre, par rapport à la force dont elles proviennent.

Concluons de là que si un corps se soutient par sa pesanteur sur des appuis placés hors de la verticale abaissée de son centre de gravité, ces appuis sont nécessairement placés de différents côtés par rapport à cette ligne, et détruisent ainsi les forces dans lesquelles la pesanteur du corps se décompose.

Proposition III. Problème.

217. Soit *un corps* P (Fig. 115), *pesant et retenu en équilibre par une puissance* Q *sur un plan incliné* MN, *qu'il touche au point* A.

L'équilibre demande que la résultante du poids et de la puissance soit perpendiculaire au point A du plan incliné. D'où il suit que les directions BP, BQ, du poids et de la puissance se rencontrent nécessairement au point B, par où passe la perpendiculaire AB élevée sur le plan incliné; en sorte que ces deux directions sont, avec la droite AB, dans un même plan PBQ, qui est tout à la fois vertical ou perpendiculaire au plan horizontal MK, et perpendiculaire

au plan incliné MN. Ainsi les droites GI, HG, où le plan PBQ rencontre les plans MK, MN, sont perpendiculaires au même point G de l'horizontale MO; et l'angle HGI mesure l'inclinaison du plan MN sur le plan MK.

En abaissant du point H la verticale HI, qui rencontre GI au point I, on formera un triangle rectangle HIG, dont l'hypoténuse HG et les côtés HI, IG, s'appellent respectivement la *longueur*, la *hauteur* et la *base* du plan incliné. Toutes les choses que l'on a besoin de considérer pour l'équilibre, dans le cas présent, se trouvent dans le plan de ce triangle; nous pouvons donc le prendre seul pour représenter ce qui est relatif au plan incliné, en supprimant les parties superflues de la Figure. Cela posé, les conditions de l'équilibre peuvent s'exprimer en différentes manieres.

I.

Sur la direction BA (Fig. 116) de la charge ou pression du plan incliné HG, je prends la partie arbitraire BD, pour représenter cette pression; et j'acheve le parallélogramme BCDE, dont les côtés BC, BE, sont pris sur les directions du poids et de la puissance. En nommant P, Q, A, le poids, la puissance, la pression du plan incliné, qui est égale à la résultante des deux forces P et Q, on aura (33), P : Q : A :: BC : BE ou CD : BD.

II.

Par le sommet H du plan incliné, soit menée la droite VHS, perpendiculaire à la direction de la puissance Q. Il est évident que les deux triangles BCD, GVH, ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, et sont par conséquent semblables : d'où il suit qu'on a, BC:CD:BD :: GV:VH: GH; donc (à cause de la proportion, P:Q:A :: BC:CD: BD) on aura, P:Q:A :: GV:VH:GH, ce qui est une maniere assez commode d'exprimer les rapports des trois forces P, Q, A.

III.

EXPRIMONS encore autrement ces rapports, en y faisant entrer des sinus ou cosinus d'angles faciles à déterminer. Pour cela, je considère d'abord qu'on a par la Géom., GV:VH:GH :: sin. GHV : sin. VGH ou sin. IGH : sin. GVH. Or, en prolongeant la base GI du plan incliné, jusqu'à ce qu'elle rencontre en X la direction de la puissance Q, et prolongeant de même, lorsqu'il est nécessaire, la longueur GH et la hauteur IH jusqu'à la direction de la même puissance, il est clair qu'à cause de VHS, perpendiculaire à TX, on a, sin. GHV ou sin. SHZ = cos. GZB; sin. GVH ou sin. SVX = cos. IXQ. On aura donc, GV: VH : GH :: cos. GZB : sin. IGH : cos. IXQ. Et par conséquent, P:Q:A :: cos. GZB : sin. IGH : cos. IXQ. C'est-à-dire que *le poids, la puissance et la charge du plan incliné sont trois forces proportionnelles au cosinus de l'angle que la direction de la puissance fait avec la longueur du plan incliné, au sinus de l'angle d'inclinaison du plan, et au cosinus de l'angle que la direction de la puissance fait avec la base du plan incliné.*

Faisons quelques applications de cette proposition générale.

COROLLAIRE. I.

218. PUISQUE les deux angles IGH, IHG, sont compléments l'un de l'autre, et que par conséquent sin. IGH = cos. IHG, il est clair que le poids sera égal à la puissance, lorsque l'angle que la direction de la puissance fait avec la longueur du plan incliné sera égal à l'angle que la verticale fait avec la même longueur. Or ces deux angles peuvent devenir égaux de deux manieres; ou en supposant que la direction de la puissance soit verticale, ou en supposant que le triangle HTZ soit isocele, et que T soit l'angle du sommet.

Dans le premier cas, la puissance est dirigée suivant la verticale PBQ, et elle soutient tout le poids; la charge du plan incliné devient nulle; ce qui est évident par soi-même, et ce qui suit de la proportion générale, puisque alors l'angle que la direction de la puissance fait avec la base du plan incliné est droit, et que le cosinus d'un angle droit est égal à zéro.

Dans le second cas, où le triangle HTZ est isocele, et où la puissance Q est dirigée suivant TZ, la charge du plan incliné a un rapport fini avec le poids ou la puissance; et on a, P ou Q:A:. cos. GZB ou cos. IHG ou sin. IGH: cos. IXQ.

COROLLAIRE II.

219. SUPPOSONS que la direction de la puissance soit parallele à la base du plan incliné (Fig. 117). L'angle que cette direction fait avec la longueur du plan incliné est égal à l'angle HGI; et l'angle qu'elle fait avec la base étant nul, son cosinus est le sinus total. On a donc alors, P:Q:A:: cos. HGI ou sin. GHI:sin. IGH:sin. tot.

Dans la même hypothese, si l'on veut exprimer le rapport des forces P, Q, A, par le moyen des côtés du triangle rectangle GIH, on considérera que sin. GHI: sin. IGH : sin. tot. :: GI : HI : HG; et que par conséquent, P:Q:A :: GI:HI:HG.

Ainsi *la puissance étant parallele à la base du plan incliné, elle est au poids comme la hauteur du plan incliné est à sa base.*

COROLLAIRE III.

220. LORSQUE la direction de la puissance Q (Fig. 118) est parallele à la longueur du plan incliné, l'angle que cette direction fait avec la longueur du plan incliné est nul; son cosinus est le sinus total, et l'angle que la même direction fait avec la base du plan incliné est égal à l'angle HGI.

On a donc, P : Q : A :: sin. tot. :: sin.HGI : cos. HGI ou sin. GHI.

Si, dans ce même cas, on veut exprimer les rapports des forces P, Q, A, par le moyen des côtés du triangle rectangle HIG, il est clair qu'à cause de la proportion, sin. tot. : sin. HGI : sin. GHI :: HG : IH : IG, on aura, P : Q : A :: HG : HI : IG. D'où l'on voit que *la puissance étant parallele à la longueur du plan incliné, elle est au poids comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.*

Corollaire IV.

221. Le poids étant représenté en général (217) par le cosinus de l'angle que la direction de la puissance fait avec la longueur du plan incliné, tandis que la puissance est constamment représentée par le sinus de l'angle d'inclinaison du plan, il est clair que, pour une même inclinaison, le rapport du poids à la puissance est le plus grand qu'il est possible, lorsque le cosinus dont on vient de parler est le plus grand qu'il est possible. Or ce cosinus devient le plus grand qu'il est possible, ou le sinus total, lorsque la direction de la puissance est parallele à la longueur du plan incliné. Ainsi, quand on se propose de faire équilibre au plus grand poids possible, avec une puissance donnée, il faut disposer cette puissance parallèlement à la longueur du plan incliné sur lequel le poids est appuyé. Mais, quand on fera passer la machine du repos au mouvement, cette disposition fera perdre en temps ce qu'on gagne en force; car, tandis que la puissance parcourt la longueur du plan incliné, le poids ne s'éleve verticalement que d'une quantité égale à la hauteur de ce plan.

Scholie.

222. Tout ce qu'on vient de dire pour l'équilibre d'une seule puissance avec un poids posé sur un plan incliné,

s'applique facilement au cas où il y auroit un nombre quelconque de puissances agissantes sur le corps. Car, pour qu'il y ait équilibre, ces puissances doivent composer avec le poids une résultante perpendiculaire au plan incliné, et passant par le point d'appui (214); elles sont donc réductibles à une seule force, à laquelle on appliquera ce qu'on a dit de la force Q.

Passons à l'équilibre d'un corps soutenu entre plusieurs plans inclinés.

Proposition IV. Problème.

223. Soit *un corps* P (Fig. 119) *soumis à la seule action de sa pesanteur, et en équilibre entre les deux plans inclinés* MN, MK, *qui se rencontrent suivant la droite* MO.

La pesanteur du corps, dirigée suivant la verticale PD, qui passe par son centre de gravité, doit nécessairement se décomposer en deux forces qui passent par les points A et B d'appui du corps, et qui y soient perpendiculaires chacune à chacun des deux plans inclinés MN, MK. Ces trois forces concourent donc en un même point, et sont placées dans un même plan, qui est tout à la fois vertical et perpendiculaire à chacun des deux plans inclinés, puisqu'il contient la verticale PD, et les deux perpendiculaires PA, BB, aux deux plans inclinés. D'où il suit que la droite MO est nécessairement horizontale; car elle est la section commune de deux plans MN, MK, auxquels le plan vertical APB est perpendiculaire, et qui lui sont aussi réciproquement perpendiculaires. On voit donc que le corps P, animé par sa seule pesanteur, ne peut pas demeurer en équilibre entre deux plans inclinés, à moins que ces deux plans ne se coupent suivant une ligne horizontale, et que la pesanteur ne se décompose en forces qui soient perpendiculaires aux points d'appui.

I.

Il est évident que les deux plans inclinés peuvent être représentés par les droites HG, FG (Fig. 120), menées dans ces plans perpendiculairement au même point G de leur section commune. Abaissons les verticales HI, FE, qui rencontrent l'horizontale IE aux points I, E. Les trois lignes HG, HI, IG, seront la longueur, la hauteur et la base du premier plan incliné; et les trois lignes FG, FE, GE, seront la longueur, la hauteur et la base du second. Par le point H, menons l'horizontale HZ, qui rencontre FG en Z. Cela posé, le poids du corps et les deux pressions qui en résultent perpendiculairement aux deux plans inclinés aux points A et B, étant perpendiculaires aux trois côtés du triangle HZG : si l'on nomme respectivement P, A, B, ces trois forces, on aura (35), P:A:B::HZ:HG:ZG.

II.

A cause de la proportion, HZ : HG : ZG :: sin. HGF : sin. HZG ou sin. FGE : sin. ZHG ou sin. HGI, on aura aussi, P : A : B :: sin. HGF : sin. FGE : sin. HGI. D'où l'on voit que *le poids est représenté par le sinus de l'angle que font entre eux les deux plans inclinés, tandis que les pressions de ces plans sont réciproquement proportionnelles aux sinus des angles qu'ils forment avec l'horizon.*

Nous observerons, en passant, que ce principe sert à déterminer les rapports qui doivent exister entre les poids des *voussoirs*, dont une voûte cylindrique ou en berceau est composée, pour que ces voussoirs soient en équilibre, et que par conséquent leur assemblage forme un *tout* immobile.

La poussée de la voûte contre les *pieds droits* qui la soutiennent se détermine de la même maniere. Suivant l'expérience, la plupart des voûtes qui s'écroulent se fendent vers les reins, à la hauteur d'environ 45 degrés au-dessus de

l'horizon. La partie du milieu peut donc être considérée comme un corps soutenu entre deux plans inclinés formés par les lignes de rupture ; et il faut donner aux pieds droits une épaisseur telle qu'ils opposent une résistance suffisante aux forces qui tendent à les renverser. Je reviens à mon sujet général.

COROLLAIRE I.

224. LORSQUE l'angle HGF est droit, la pression contre l'un des plans est au poids, comme le sinus de l'angle d'inclinaison de l'autre plan est au sinus total, ou comme la hauteur du même plan est à sa longueur. Cela doit être en effet (220) : car il est évident qu'alors la pression contre le premier plan incliné fait, par rapport au second, l'office d'une puissance qui retiendroit le corps sur celui-ci, en agissant parallèlement à sa longueur.

COROLLAIRE II.

225. QUE l'un GF des deux plans (Fig. 121) soit horizontal, il supportera tout le poids du corps ; le point d'appui B du corps sur ce plan sera placé dans la verticale abaissée de son centre de gravité ; et la pression de l'autre plan HG s'évanouira. Tout cela est évident : car alors le poids P et la pression du plan GF sont exprimés par les sinus égaux des angles HGF, HGI, qui sont suppléments l'un de l'autre, tandis que la pression du plan HG est exprimée par le sinus de l'angle que le plan GF fait avec l'horizon, qui est égal à zéro.

COROLLAIRE III.

226. QUE le plan GF (Fig. 122) soit vertical, on aura, P : A : B : : sin. HGF ou sin. GHI : sin. FGE ou sin. tot. : sin. HGI. La pression contre le plan FG fait, par rapport

au plan HG, l'office d'une puissance qui retiendroit le corps sur ce plan, en agissant parallèlement à sa base GI.

On déterminera de même les rapports particuliers du poids et des pressions des plans inclinés, dans les autres hypotheses particulieres.

REMARQUE.

227. Si un corps soutenu en équilibre entre deux plans, au lieu d'être simplement soumis à l'action de sa pesanteur, étoit poussé par des forces qui, combinées avec la pesanteur, produisissent une résultante dont la direction ne fût pas verticale, on appliqueroit à ce cas la théorie générale de l'article 228, en y prenant la direction de la résultante proposée pour la verticale, et la perpendiculaire à cette direction pour l'horizontale.

SCHOLIE.

228. Lorsqu'un corps s'appuie à la fois sur plus de deux plans inclinés, les intersections de ces plans ne sont plus des lignes déterminées : elles peuvent avoir des positions différentes par rapport à l'horizon. Mais, pour l'équilibre, il faut que la pesanteur du corps, ou en général la force qui le pousse, se décompose en forces qui soient perpendiculaires aux plans inclinés, et qui passent par les points d'appui du corps. Il y a donc toujours alors dans la direction de cette force un point duquel on peut abaisser des perpendiculaires aux plans, aux endroits où le corps s'appuie. Ce point doit être regardé comme celui où concourent les directions de plusieurs forces en équilibre. Ainsi il s'agit alors de décomposer la force appliquée au corps en plusieurs autres forces, dirigées perpendiculairement aux plans inclinés, et ces forces exprimeront les pressions des mêmes plans ; mais une telle décomposition peut être un problême indéterminé, si l'on s'en tient strictement aux

principes ordinaires de la mécanique; c'est ce qu'il est à propos d'expliquer.

I.

Supposons, pour ramener la question à une autre plus simple, et de même nature, qu'un corps, uniquement soumis à l'action de sa pesanteur, s'appuie par plusieurs points sur un plan horizontal, et qu'il soit en équilibre. Il est d'abord évident que, s'il n'y a que deux appuis, la détermination des pressions qu'ils supportent est un problème déterminé; car il faut pour l'équilibre que la direction de la pesanteur du corps, réunie à son centre de gravité, et les pressions verticales des deux appuis, soient dans un même plan vertical; d'un autre côté, la pression d'un appui est à la pesanteur du corps, comme la ligne horizontale, comprise entre l'autre appui et la direction de la pesanteur, est à la distance des deux appuis.

II.

Le problême est encore déterminé, quand il y a trois appuis, et que ces appuis ne sont pas en ligne droite. En effet, soient (Fig. 138) A, B, C, les trois appuis proposés, que je joins par les droites AB, AC, BC; imaginons que du centre de gravité du corps tombe une ligne verticale qui rencontre au point P le plan horizontal ABC; et menons les droites APD, PB, PC. Je nomme P le poids du corps, et a, b, c, les pressions inconnues des trois appuis A, B, C. Cela posé, je décompose d'abord la force P en deux autres forces verticales, qui passent par les points A et D; la premiere a pour valeur $\frac{P \times DP}{AD}$, et représente la pression de l'appui A, de sorte que $a = \frac{P \times DP}{AD}$: la seconde a pour valeur $\frac{P \times AP}{AD}$; je la décompose elle-même en deux autres

forces, qui passent par les appuis B et C, et qui expriment les pressions de ces appuis ; ce qui donne, ... $b = \frac{P \times AP}{AD} \times \frac{DC}{BC}$, $c = \frac{P \times AP}{AD} \times \frac{DB}{BC}$. Par conséquent on aura cette suite de proportionnelles, $P:a:b:c :: P : \frac{P \times DP}{AD} : \frac{P \times AP}{AD} \times \frac{DC}{BC} : \frac{P \times AP}{AD} \times \frac{DB}{BC}$; ou, $P:a:b:c :: BC \times AD : BC \times DP : AP \times DC : AP \times DB$. Or il est aisé de voir que les quatre produits, qui forment la suite des conséquents, sont entre eux comme les quatre triangles ABC, PBC, PAC, PAB. Car d'abord les deux triangles ABC, PBC, qui ont même base BC, ont des hauteurs qui sont entre elles comme les lignes AD, PD ; ainsi $ABC : PBC :: BC \times AD : BC \times PD$. D'un autre côté, on a, PBC:PDC :: BC:DC ; et PDC:PAC :: PD:AP. Donc, en écrivant ces deux proportions l'une au-dessous de l'autre, et les multipliant par ordre, on aura, $PBC:PAC :: BC \times PD : DC \times AP$. Semblablement, on a, $PBC : PAB :: BC \times PD : AP \times DB$. Donc enfin, $P:a:b:c :: ABC:PBC:PAC:PAB$.

Ce théoréme élégant est d'Euler, qui l'a donné sans démonstration dans un très beau mémoire, intitulé : *De Pressione ponderis in planum cui incumbit* (Acad. de Pétersbourg, tom. XVIII, ann. 1763).

Lorsque les trois appuis A, B, C, sont en ligne droite, les triangles ABC, PBC, PAC, PAB, s'évanouissent; et le rapport des forces P, a, b, c, est indéterminé. Voyez les réflexions de d'Alembert sur ce cas (*Opuscules Mathém., tome VIII, page* 36).

III.

Si le corps s'appuie par plus de trois points, le probléme, considéré toujours suivant les lois ordinaires de la mécanique, est indéterminé, quel que soit l'arrangement respectif des appuis. Euler, pour le rendre déterminé en général, regarde le plan sur lequel portent les appuis, comme

formé de terre glaise, et suppose que les pressions des appuis sont proportionnelles aux quantités dont les pieds du corps s'enfoncent dans la glaise. Voyez le développement de cette nouvelle théorie dans le mémoire cité.

Proposition V. Problème.

229. Déterminer *les conditions de l'équilibre de deux poids* P *et* Q (Fig. 123), *attachés aux deux extrémités d'une corde* PHQ, *et appuyés sur deux plans inclinés* MN, MK, *qui se rencontrent suivant la droite* MO.

1°. Il est clair que si rien n'empêche la corde de glisser sur l'arête MO, il faut, pour que la corde ne glisse pas effectivement, que cette arête soit horizontale. Alors, en regardant la tension de la corde PHQ, qui est égale de part et d'autre, comme une force qui retient chacun des deux corps en équilibre sur son plan incliné, on trouvera généralement (217) les rapports qui existent entre cette force, les poids des deux corps, et les pressions qui résultent perpendiculairement sur les deux plans inclinés.

Par exemple, que HG, HF (Fig. 124), soient les longueurs de nos deux plans inclinés, et HI leur hauteur commune. Que la corde qui joint les deux corps passe dans des fentes pratiquées suivant les longueurs HG, HF, de maniere qu'elle aille en ligne droite d'un corps à l'autre. Soient H*mn*, H*nm*, les angles que cette corde fait avec les longueurs des deux plans inclinés; GVP, l'angle qu'elle fait avec leurs bases. En nommant T la tension de la corde, A et B les pressions perpendiculaires des deux plans inclinés HG, HF, on aura ces deux suites de proportionnelles:

$$P:T:A :: \cos. Hmn : \sin. HGI : \cos. GVP,$$
$$Q:T:B :: \cos. Hnm : \sin. HFI : \cos. GVP.$$

Comme la même force T se trouve dans ces deux suites, on pourra comparer ensemble deux quelconques des cinq

forces P, T, A, Q, B. Ainsi, pour comparer P avec Q, on formera ces deux proportions, P : T :: cos. H*mn*: sin. HGI ; T : Q :: sin. HFI:cos. H*nm* ; lesquelles étant écrites l'une au-dessous de l'autre, et multipliées par ordre, donnent, P:Q :: cos. H*mn* × sin. HFI:sin. HGI × cos. H*nm*.

On opérera d'une maniere semblable pour les autres comparaisons.

Je laisse au lecteur le soin de développer toutes les conséquences particulieres qui résultent de ces proportions générales.

2°. S'il y avoit sur l'arête MO (Fig. 123), section commune des deux plans inclinés sur lesquels les deux poids P et Q s'appuient, un obstacle, comme un clou, une poulie, qui, sans gêner d'ailleurs l'action de la corde, empêchât seulement cette corde de glisser, il ne seroit plus nécessaire que l'arête MO fût horizontale. Mais, en supposant même que les deux parties HP, HQ, de la corde ne soient pas dans un même plan, pourvu que la corde aït toute liberté de glisser suivant sa longueur, elle est toujours également tendue dans les deux sens, et on peut regarder cette tension comme une force qui retient chacun des deux corps en équilibre sur son plan incliné.

Scholie.

230. L'équilibre des corps soutenus entre des surfaces courbes ou sur des surfaces courbes se rapporte à celui des plans inclinés. Car les surfaces courbes pouvant être regardées comme des assemblages d'une infinité de petits plans différemment inclinés, si l'on imagine, par les points d'appui des corps, des plans tangents aux surfaces courbes, on pourra considérer les corps comme soutenus entre ces plans ou sur ces plans.

SECTION VI.

De la Vis.

231. La *vis* (Fig. 125, 126) est un cylindre droit, autour duquel s'enveloppe ou s'entortille spiralement un solide, qui a, suivant sa grosseur, la forme d'un prisme parallélogrammique ou triangulaire. L'une des faces parallélogrammiques de ce solide s'applique sur la surface convexe du cylindre; et si l'on conçoit que ce même solide est composé, dans le sens de sa longueur, d'une infinité de filets paralleles entre eux, tous ces filets, en s'entortillant autour du cylindre, à différentes distances de l'axe CK, forment des angles aigus et égaux entre eux, avec des droites qui les rencontreroient, et qui seroient paralleles à l'axe CK.

Le relief spiral, formé ainsi sur la surface du cylindre, s'appelle *filet de la vis*. Nous nous servirons du mot *spire*, pour désigner la partie d'un filet élémentaire du prisme, laquelle correspond à un tour sur le cylindre. La distance AB qu'il y a parallèlement à l'axe CK, entre deux spires correspondantes, se nomme *hauteur du pas de la vis*, ou simplement *pas de la vis*. Il est clair que tous les pas de la vis sont égaux entre eux.

La vis entre dans une piece MN, qu'on nomme *écrou*. Cette piece doit donc être creusée intérieurement d'une quantité égale et semblable au filet de la vis, en sorte que l'écrou peut être regardé comme le moule du filet de la vis.

232. On emploie la vis et son écrou pour comprimer les corps, quelquefois aussi pour élever des poids. L'effet revient au même dans les deux cas. La puissance Q, qui meut la machine, est appliquée ordinairement à une barre qui

traverse la vis ou l'écrou ; et l'une de ces pieces est mobile, tandis que l'autre est immobile. Comme la puissance agit toujours de la même maniere, soit que la vis soit fixe et l'écrou mobile, ou la vis mobile et l'écrou fixe, il suffit ici de considérer l'un de ces deux cas.

PROPOSITION I. PROBLÊME.

233. DÉTERMINER, *dans la vis, le rapport de la puissance au poids, pour qu'il y ait équilibre.*

Je suppose que la vis soit fixe et l'écrou mobile ; et, pour établir clairement l'état de la question, je regarde la vis comme verticale, et l'écrou comme chargé d'un poids P, qu'il faut élever, à l'aide de la puissance Q, qui agit perpendiculairement à l'extrémité de la barre CQ, et dans un plan perpendiculaire à l'axe de la vis. Il s'agit de trouver le rapport de la puissance Q au poids P. On peut comprendre dans ce poids celui de l'écrou.

Le poids P étant soutenu par les filets de la vis, nous pouvons le décomposer en une infinité de petits poids distribués sur les différents points des filets de la vis, aux endroits où ces filets sont touchés par les points correspondants des filets de l'écrou. Représentons-nous la courbe spirale que forme chaque filet élémentaire du prisme générateur, comme partagée en une infinité d'éléments par des plans horizontaux. Il est clair que ces éléments pourront être regardés comme de petites lignes droites, ou de petits plans inclinés dont l'angle d'inclinaison constante avec l'horizon est le complément de celui que chaque filet élémentaire du prisme forme avec une ligne droite parallele à l'axe du cylindre. Soit p l'un des poids élémentaires dans lesquels le poids P a été décomposé ; et concevons d'abord que ce petit poids p est retenu en équilibre sur l'un des petits plans inclinés dont nous venons de parler, au moyen d'une puissance r parallele à la base, ou tangente en p à la circonférence, qui a Cp pour rayon. En nommant b la

base du plan incliné, h sa hauteur, on aura (219), $p:r::b:h$. Or il est évident qu'à un pas de la vis répond une infinité de plans inclinés, et que la somme de leurs bases est égale à (1) *circ.* Cp, tandis que la somme de leurs hauteurs est le pas même AB de la vis. Donc, puisque tous ces plans sont également inclinés, on aura, $b:h::$ *circ.* Cp:AB, et par conséquent aussi, $p:r::$ *circ.* Cp:AB.

Maintenant, au lieu de supposer que le poids p est soutenu par la puissance r, imaginons que la puissance Q ayant été décomposée en une infinité de puissances q, qui lui sont paralleles, et qui sont appliquées en Q, l'une de ces puissances élémentaires q retient le corps p, au moyen d'un levier CpQ, qui empêche le corps de glisser. Les deux puissances r et q, dont chacune en particulier fait équilibre au poids p, peuvent être regardées comme appliquées aux points p, Q, du levier CpQ, dont le point d'appui est dans l'axe de la vis, autour duquel la rotation tend à se faire. Ainsi, puisque ces puissances se contrebalanceroient mutuellement, si elles agissoient en sens contraires, on aura (156), $r:q::$ CQ:Cp; ou bien, $r:q::$ *circ.* CQ:*circ.* Cp. Multipliant cette proportion par la précédente, $p:r::$ *circ.* Cp:AB, on trouvera, $p:q::$ *circ.* CQ:AB; c'est-à-dire que chaque poids élémentaire du poids P est à chaque puissance élémentaire correspondante de la puissance Q, dans le rapport constant de la circonférence, qui a pour rayon la distance du point d'application de la puissance à l'axe de la vis, à la hauteur du pas de la vis. Donc *le poids total* P *est à la puissance totale* Q, *comme la circonférence du cercle qui a pour rayon la distance du point d'application de la puissance à l'axe de la vis, est à la hauteur du pas de la vis.*

---

(1) Cette expression abrégée *circ.*, mise au-devant d'une ligne, désigne la circonférence qui a cette ligne pour rayon.

COROLLAIRE I.

234. On voit par-là que, dans le simple état d'équilibre, le poids est plus grand que la puissance, dans le rapport de *circ.* CQ à AB. Mais, lorsque la machine passe du repos au mouvement, il est clair que le poids ne s'éleve que de la quantité AB, tandis que la puissance parcourt horizontalement un espace égal à *circ.* CQ; on perd donc alors en temps ce qu'on gagne en force.

COROLLAIRE II.

235. La même proportion P:Q :: *circ.* CQ:AB, fait voir que, la hauteur du pas de la vis diminuant, la puissance doit diminuer aussi, tout restant d'ailleurs le même. Ainsi une même vis comprime avec d'autant plus d'effort, ou éleve un poids d'autant plus grand, que la hauteur de son pas est plus petite.

REMARQUE I.

236. Si la vis, toujours fixe, étoit inclinée, il faudroit décomposer le poids à élever en deux forces, l'une perpendiculaire à l'axe de la vis, l'autre dirigée suivant cet axe. La premiere seroit détruite par l'appui qui soutient la vis, et devroit être négligée; la seconde seroit la seule qui fût contrebalancée par la puissance que je suppose toujours agir dans un plan perpendiculaire à l'axe, et devroit lui être comparée de la même maniere que le poids P a été comparé à la puissance Q (233). Comme on connoît le rapport de la partie du poids qui agit suivant l'axe à ce poids, l'angle que fait l'axe de la vis avec l'horizon étant donné, il s'ensuit qu'on connoîtra aussi le rapport du poids à élever à la puissance.

REMARQUE II.

237. Il arrive quelquefois que la puissance tire obliquement par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de la vis. Alors elle se décompose en deux autres forces, l'une parallele à l'axe, l'autre dirigée dans un plan perpendiculaire à cet axe. Ces deux forces seront connues, puisqu'on est censé connoître la quantité et la direction de la puissance. La premiere force s'ajoute à l'effort que la vis doit soutenir dans le sens de son axe, ou bien s'en retranche, selon que la puissance tire de haut en bas, ou de bas en haut; et la seconde fait équilibre à l'effort résultant suivant l'axe, de la même maniere que la puissance Q fait équilibre au poids P, dans l'article 233. En établissant la proportion que cet équilibre demande, et faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on parviendra à une équation du premier degré; d'où l'on tirera le rapport du poids à la puissance primitive. Je ne développe pas ce calcul en détail, parcequ'il est facile, et que d'ailleurs il n'est pas d'un grand usage dans la pratique.

REMARQUE III.

238. L'ACTION de la vis ne se transmet pas toujours immédiatement au poids qu'il faut élever, ou en général à la résistance qu'il faut vaincre. Par exemple, la Figure 127 représente une machine dans laquelle le filet d'une vis engrene avec une roue dentée garnie d'un tambour T, autour duquel s'enveloppe une corde qui soutient le poids P. Une puissance Q, appliquée à la manivelle M, empêche le poids de descendre. Le tambour T pourroit porter lui-même une seconde vis dont le filet engrenât avec une seconde roue dentée, garnie d'un second tambour qui soutînt un poids, ou qui portât une troisieme vis; ainsi de suite. Quand on saura trouver le rapport du poids P à la puissance Q, pour

la Figure 127, on appliquera sans peine les mêmes raisonnements aux autres cas.

On appelle ces sortes de vis qui engrenent avec des roues dentées *vis sans fin*, parceque l'engrenage n'a pas de fin, et demeure toujours le même, tant que la machine tourne.

PROPOSITION II. PROBLÊME.

239. DÉTERMINER (Fig. 127) *le rapport du poids* P *à la puissance* Q, *pour qu'il y ait équilibre.*

Tout le système étant supposé en équilibre, il est évident que le poids est contrebalancé immédiatement par la résistance que le filet de la vis oppose en h à la dent de la roue, suivant la direction hg perpendiculaire au rayon Ch, ou parallele à l'axe de la vis. Ainsi, en nommant h cette résistance, et la regardant comme une force appliquée à la roue d'un tour, et en équilibre avec le poids P, on aura (196), $P:h::Ch:Cd$.

De même que le filet de la vis pousse la dent de la roue suivant la direction gh, ce filet est repoussé à son tour suivant la direction contraire hi, et avec la même force, par la dent de la roue. Cette derniere force peut être regardée comme un poids qui agit parallèlement à l'axe de la vis, et qui est en équilibre avec la puissance Q. Par conséquent, hz étant la hauteur du pas de la vis, on aura (233), h:Q :: *circ.* EM:hz.

Multipliant ces deux proportions par ordre, il viendra, P:Q :: Ch × *circ.* EM:Cd × hz. Ainsi *le poids est à la puissance, comme le produit du rayon de la roue par la circonférence que décrit la manivelle, est au produit du rayon du cylindre, par la hauteur du pas de la vis.*

COROLLAIRE.

240. EN employant plusieurs roues dentées et plusieurs vis sans fin pour soutenir un poids donné, la force, appli-

quée à la manivelle, peut être très petite par rapport au poids. Mais aussi, dans le cas du mouvement, la puissance est obligée d'aller plus vite que le poids, précisément dans la même raison qu'elle est moindre que lui. On perd donc toujours en temps ce qu'on gagne en force.

SECTION VII.

Du Coin.

241. Le *coin* est un prisme triangulaire ABCDEF (Fig. 128), qu'on introduit dans une fente pour écarter ou séparer les deux parties d'un corps. Quelquefois aussi on s'en sert pour soulever des poids, ou pour comprimer des corps.

Les couteaux, les rasoirs, les ciseaux, et en général tous les instruments tranchants ou pénétrants, se rapportent au coin.

On appelle *tête du coin* la face parallélogrammique ABCD, qui reçoit le coup, ou l'impression de la force motrice; l'arête EF, par laquelle le coin commence à s'enfoncer, en est le *tranchant;* et les faces parallélogrammiques ABFE, DCFE, par lesquelles il presse les corps contigus, en sont les *côtés.*

Nous représenterons cet instrument par son simple profil DAE (Fig. 129), c'est-à-dire par le triangle qui, en se mouvant parallèlement à lui-même, engendre le coin.

Proposition. Problème.

242. Déterminer *les conditions de l'équilibre entre la force imprimée perpendiculairement à la tête du coin, et les résistances du corps à fendre.*

Supposons un corps appuyé par sa base ZF (Fig. 130) sur un plan immobile ; que, pour écarter les deux parties M et N de ce corps, on introduise entre elles un coin DEA frappé ou poussé perpendiculairement à sa tête par une force Q. Il est clair que cette force, étant détruite uniquement par les résistances que les parties du corps à fendre opposent à l'action du coin, doit nécessairement se décomposer en deux forces dirigées vers les appuis I et K, perpendiculairement aux côtés AE, DE, du coin, qu'on peut regarder comme des plans tangents aux appuis I et K. Ainsi (32) la force Q et les deux pressions qu'elle produit aux points I et K, sont dans un même plan, et concourent au même point O. Nommons Q, I, K, ces trois forces ; et considérons que leurs directions QO, OI, OK, étant perpendiculaires chacune à chacun des trois côtés AD, AE, DE, du triangle AED, on a (35), Q:I:K :: AD:AE:DE ; et par conséquent aussi, Q:I + K :: AD:AE + DE.

A cause de l'équilibre, les deux pressions I et K sont détruites par deux résistances contraires et égales chacune à chacune, que les parties du corps à fendre leur opposent. Ainsi *la force, imprimée perpendiculairement à la tête du coin, est à la somme des résistances que les parties du corps à fendre opposent immédiatement à son action, comme la tête du coin est à la somme de ses côtés.*

On voit que plus le coin deviendra tranchant, plus la même puissance acquerra d'avantage sur la somme des résistances à vaincre, et plus, par conséquent, le coin trouvera de facilité à s'enfoncer.

COROLLAIRE. I.

243. LORSQUE le coin est isocele, c'est-à-dire lorsque les côtés AE, DE, sont égaux, les deux forces I et K sont égales ; et on a, Q:I + K :: AD:2AE :: $\frac{AD}{2}$:AE. Donc alors *la force, imprimée perpendiculairement à la tête du coin,*

est à la somme des résistances que les parties du corps à fendre lui opposent, comme la demi-tête du coin est à l'un des côtés.

COROLLAIRE II.

244. PRENONS en général sur les directions des deux forces I, K, les parties IV, KH, égales respectivement aux cotés AK, DE, du coin, pour représenter ces forces; et décomposons chacune des mêmes forces en deux autres, l'une perpendiculaire, l'autre parallele à la base ZF, en construisant les deux parallélogrammes rectangles IRVT, KSHG, qui satisfassent à cette condition. Il est évident que les deux forces IR, KS, étant perpendiculaires au plan sur lequel le corps s'appuie, ne peuvent imprimer aucune sorte de mouvement à ce corps. Mais la force IT tend à mouvoir la partie M parallèlement à ZF; et la force KG tend à mouvoir la partie N parallèlement à FZ. Nommons T et G les deux forces IT, KG. Cela posé,

1°. On aura, I:T :: IV ou AE:IT; et comme on a (242), Q:I::AD:AE, si l'on multiplie ces deux proportions par ordre, on aura, Q:T :: AD:IT.

2°. On trouvera semblablement, Q:G::AD:KG.

Ces deux proportions donnent la suite de proportionnelles, Q:T:G :: AD:IT:KG; et par conséquent aussi, Q:T + G :: AD:IT + KG.

COROLLAIRE III.

245. SUPPOSONS que la tête DA du coin soit parallele à la base ZF; et menons, du tranchant E, la perpendiculaire EB sur la tête. Les deux triangles rectangles IVT, EAB, qui ont des hypoténuses égales, par construction, et qui, ayant tous les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont équiangles, sont parfaitement égaux. On aura donc, IT = EB. On démontrera de même que KG = EB. Ainsi les

deux forces T et G sont égales; et la suite précédente donne,
$Q : T + G :: AD : 2EB :: \frac{AD}{2} : EB.$

Il suit de là que, *lorsque la tête du coin est parallele au plan sur lequel le corps s'appuie, la force, imprimée perpendiculairement à la tête du coin, est à la somme des résistances que les deux parties du corps à fendre lui opposent parallèlement à la tête du coin, comme la demi-tête du coin est à sa hauteur.*

Cette propriété peut être appliquée au cas où l'on se sert du coin pour comprimer; car alors la résistance s'exerce parallèlement à la tête du coin.

Scholie.

246. Telle est à-peu-près toute la théorie mathématique du coin. Nous ne devons pas dissimuler que l'application de cette théorie à la pratique n'est pas susceptible d'une grande précision, parceque les différents corps sont composés de parties plus ou moins adhérentes entre elles, ou de fibres plus ou moins flexibles : d'où il résulte que la même force, appliquée au même coin, ne produira pas les mêmes enfoncements dans deux matieres différentes, et que chaque enfoncement particulier ne peut guere être déterminé exactement que par la voie d'une expérience immédiate.

CHAPITRE IV.

Des Résistances que les Machines éprouvent, lorsqu'elles sont prêtes à se mouvoir.

247. Si les matieres dont les machines sont composées étoient parfaitement dures, parfaitement polies, et si les

cordages qu'on est souvent obligé d'employer pour transmettre l'action de la force motrice d'une partie de la machine à l'autre avoient une entiere flexibilité, la théorie de l'équilibre, que nous avons établie dans le chapitre précédent, suffiroit pour déterminer dans chaque cas la force requise pour contrebalancer un poids donné; et, cette force une fois trouvée, on seroit assuré qu'en l'augmentant de la plus légere quantité, l'équilibre se romproit, et que le poids seroit élevé. Mais, dans l'état physique et naturel des machines, il s'en faut beaucoup que les choses soient ainsi. Il peut se faire qu'on augmente sensiblement le poids ou la puissance, sans que pour cela il résulte aucun mouvement dans la machine. Le frottement des surfaces les unes contre les autres, et la difficulté que les cordes ont à se plier autour des cylindres ou tambours qu'elles embrassent, s'opposent à la génération du mouvement. L'estimation de ces résistances appartient à la statique, puisque l'équilibre subsiste jusqu'à ce qu'elles soient surmontées. On ne doit pas attendre une théorie rigoureuse sur cette matiere, qui est mêlée d'un si grand nombre d'accidents et de difficultés physiques, qu'on ne parviendra peut-être jamais à l'éclaircir complètement.

SECTION I.

Du Frottement.

248. Tous les corps, quelque polis qu'on les suppose, sont couverts d'éminences et de cavités; de maniere que, quand on frotte deux corps l'un contre l'autre, les pointes du premier s'engagent dans les cavités du second, et que de là résulte une difficulté à les séparer, en trainant seulement l'un sur l'autre.

249. Il y a deux especes principales de frottements, le frottement des corps qui ne font simplement que *glisser* les uns sur les autres, et celui des corps qui *tournent*. Le frottement de la premiere espece est beaucoup plus sensible que celui de la seconde, parceque, dans le premier cas, on ne peut faire glisser le corps, ou qu'en le soulevant un peu verticalement pour dégager les pointes des cavités, ou qu'en brisant les pointes, par un mouvement qui leur soit perpendiculaire; au lieu que, dans le second cas, le mouvement de rotation tend par lui-même à dégager les pointes des cavités, et fait glisser le corps comme sur un plan incliné. Une roue de charrette ou de carrosse, qui tourne sur le terrain, y éprouve un frottement de la seconde espece. Aussi marche-t-elle beaucoup plus vite qu'elle ne feroit, si elle glissoit simplement sans tourner. C'est pour cela que, dans les descentes un peu roides, on *enraie* les roues des voitures, c'est-à-dire on les empêche de tourner, afin d'augmenter le frottement, et de ralentir par-là le mouvement que la pesanteur imprime à la voiture le long du plan incliné.

250. Quelquefois les deux sortes de frottements se combinent ensemble, et il en résulte un frottement *mixte*, lequel a lieu, lorsqu'il y a tout à la fois *glissement* et *rotation* dans les corps qui frottent ensemble. Tel est le frottement de l'*aissieu* d'une roue contre le *moyeu*. En effet; qu'une roue *axy* (Fig. 131) tourne sur le terrain horizontal AB, en allant de A vers B; et supposons que, parvenue en B, elle ait fait une révolution, en sorte que tous les points de la circonférence s'étant appliqués sur la droite AB, ces deux lignes soient égales entre elles. Il est clair qu'il n'y aura sur le terrain qu'un simple frottement de la seconde espece. Il n'est pas moins évident que tous les points *c*, *e*, de l'aissieu *efi*, qui n'a qu'un simple mouvement progressif, et point de rotation, décrivent des droites *cq*, *ep*, égales et paralleles à AB, avec des vitesses égales à celles de

rotation du point *a* de la circonférence *axy*; et comme le point *m* du moyeu *mgh* tourne avec une vitesse qui est moindre que celle du point *a*, dans le rapport de *cm* à *ca*, il est visible que le point *e* de l'aissieu glisse continuellement sur le point correspondant du moyeu. D'où il suit qu'en cet endroit il y a deux mouvements, l'un de rotation, l'autre de glissement, ou un seul mouvement composé des deux premiers : il y a donc aussi deux frottements, l'un de *rotation*, l'autre de *glissement*, ou un seul frottement composé des deux autres.

251. Des machinistes, habiles à d'autres égards, ont regardé le frottement de la seconde espece comme nul, et ont cru qu'une machine, dont les pieces n'auroient aucun mouvement de *glissement* les unes sur les autres, devroit être censée exempte de frottement; mais cela est une erreur manifeste : car il est clair que, dans le frottement de la seconde espece, les pointes ne peuvent se dégager des cavités, sans que le corps ne rampe à chaque instant le long d'un petit plan incliné, et sans que par conséquent il ne soit soulevé d'une quantité égale à la hauteur de ce plan incliné, quelque petite qu'elle puisse être d'ailleurs par rapport à la longueur de la rampe. D'où il suit que cette espece de frottement doit absorber une certaine partie de la force motrice. On voit par-là que si un cercle *axyz* (Fig. 132), posé sur un plan incliné et abandonné à l'action de la pesanteur, descend en tournant, il perd une partie de la vîtesse que la pesanteur tend naturellement à lui imprimer. Car représentons sa pesanteur par la verticale *cp*, et décomposons cette force en deux autres *cr*, *cq*, l'une perpendiculaire, l'autre parallele à la longueur du plan incliné HGI; la premiere est détruite, la seconde est la seule qui fasse descendre le corps; et comme la direction de cette force partage le cercle en deux parties *xaz*, *xyz*, parfaitement égales, il est évident que ce cercle, en descendant, décriroit simplement la droite *hg* égale et parallele à HG,

et ne tourneroit point, s'il n'éprouvoit aucun frottement en *a*. Mais, dans l'état physique des choses, quelque polies que puissent être les deux surfaces, il y a continuellement en *a* un engrenage des pointes dans les cavités; d'où résulte un frottement, qu'on doit regarder comme une force dirigée dans le sens GH, et qui, étant par conséquent contraire à l'action de la force *cq*, détruit nécessairement une certaine partie de cette force.

252. Quoique les deux especes de frottements different en *quantités*, on sent néanmoins qu'elles doivent suivre à-peu-près les mêmes lois; car la résistance dans les deux cas peut être comparée à celle d'un corps, qu'il faut soulever d'une certaine quantité fort petite, et qui est plus grande dans le premier que dans le second. Il est donc clair, et l'expérience le prouve, qu'on diminuera l'un et l'autre frottement, soit en polissant les surfaces frottantes, soit en les enduisant de quelque matiere grasse et onctueuse, qui en comble les cavités. L'expérience fait voir encore que (toutes choses d'ailleurs égales) le frottement des matieres de même espece est plus grand que celui des matieres de différentes especes; c'est-à-dire, par exemple, que le frottement du cuivre contre le cuivre est plus grand que celui du cuivre contre le fer. Cet effet s'explique, en considérant que, dans les matieres de même genre, les surfaces étant semblablement hérissées de pointes et de cavités, le contact est plus immédiat, les pointes s'engagent plus avant dans les cavités, que cela n'arrive, lorsque les matieres sont de différentes especes.

253. Il y a une autre circonstance d'un genre particulier, qui produit des variétés sensibles dans le frottement. Cette circonstance est la durée de l'application des surfaces les unes contre les autres. On observe qu'en faisant séjourner deux surfaces l'une sur l'autre pendant quelque temps, leur frottement devient plus grand qu'il ne l'est dans les premiers

instants, soit parcequ'une pression plus continuée engage plus avant les pointes dans les cavités, soit parcequ'en général quelque cause physique colle, pour ainsi dire, plus intimement ensemble les deux surfaces; mais on ne connoît rien de précis sur la loi que suit cette augmentation de frottement, ni sur le temps de sa durée.

254. On a long-temps agité la question (et elle n'est pas encore absolument décidée), si, tout le reste étant d'ailleurs le même, l'étendue plus ou moins grande des surfaces par lesquelles deux corps se touchent, contribue à en augmenter le frottement. Amontons est le premier qui ait donné à cette matiere toute l'attention qu'elle mérite. Il prétend (1) que le frottement est simplement proportionnel à la pression, c'est-à-dire à la force qui applique les deux surfaces l'une contre l'autre, et ne dépend point de leurs grandeurs. Il confirme ce sentiment par des expériences. Muschenbroek ne pense pas de même (2): il soutient que les frottements ne suivent pas la raison des pressions; mais les expériences qu'il rapporte à ce sujet sont trop peu nombreuses, et ont été faites trop en petit, pour pouvoir décider la question. Plusieurs autres auteurs n'ont pas mieux réussi. Moi-même, j'ai un peu travaillé sur la même matiere, par la voie de l'expérience; je me suis rencontré à-peu-près avec Amontons. Par exemple, j'ai trouvé que, pour faire glisser sur une table horizontale un parallélipipede rectangle de bois, pesant environ 51 livres, et que je chargeois encore de différents poids; pour le faire glisser, dis-je, par deux de ses faces, dont l'une étoit environ cinq fois plus grande que l'autre, il falloit employer à-peu-près la même force dans les deux cas. Mais j'avoue que les résultats de tout ce travail ne sont ni assez précis, ni assez multipliés, ni assez con-

(1) Mém. de l'Académie, année 1699.
(2) Cours de physique expérimentale, tome I.

stants, pour que j'ose en faire la base d'aucun système particulier. Ils me font seulement beaucoup incliner pour celui d'Amontons, avec quelques restrictions dont je parlerai, lorsque j'aurai exposé les raisons sur lesquelles cet auteur se fonde.

255. Les pointes, dont les corps sont hérissés, peuvent être regardées, selon lui, ou comme de petits corps durs, incapables de se plier, ou comme de petits ressorts qui se courbent sous les poids qui les pressent. Or, 1°. si vous regardez les pointes comme des corps durs, il est évident que, pour dégager les deux surfaces, il faut élever l'une, et que ce qui s'oppose à cette action est simplement le poids, et non pas la grandeur de la surface. Il est vrai que, dans une grande surface, il y a plus de pointes engagées que dans une petite; mais elles le sont moins profondément dans celle-ci, précisément suivant le même rapport, puisque, la pression qui produit l'engrenage étant toujours la même, l'engrenage total doit toujours être aussi le même. 2°. Si l'on considere les pointes comme de petits ressorts à plier, le frottement sera encore proportionnel à la pression : car plus la pression est grande, plus elle plie les ressorts; et plus par conséquent ils lui opposent de résistance. Lorsqu'on augmente la surface, la pression restant toujours la même, les ressorts sont d'autant moins pliés, qu'ils sont en plus grand nombre; et la force, consumée dans les deux cas contre les ressorts, doit être la même et toujours proportionnelle à la pression.

256. Quoique ces raisonnements paroissent plausibles au premier coup-d'œil, on ne peut pas néanmoins les regarder comme démonstratifs; et l'expérience y est contraire en certains points. Car, 1°. le frottement ne suit pas exactement le rapport des pressions, toutes choses étant égales d'ailleurs. On observe constamment que, dans les grosses masses, le frottement est une moindre partie de la pression,

qu'il ne l'est dans les petites. En voici un exemple bien sensible. Les constructeurs de vaisseaux ne donnent que 10 à 12 lignes de pente, par pied, aux plans sur lesquels doivent glisser les vaisseaux qu'on veut lancer à la mer. Or cette pente, qui est suffisante pour mettre ces grosses masses en mouvement, malgré la résistance du frottement, est trop petite pour des poids d'une grosseur médiocre. Si donc on veut supposer que les frottements qu'éprouvent deux poids sont proportionnels à ces poids, il faut qu'il n'y ait pas une très grande différence entre leurs pesanteurs.

2°. La conclusion d'Amontons pourroit être admissible, si les surfaces frottantes étoient composées de parties parfaitement dures, ou parfaitement élastiques ; mais ces deux cas n'ont lieu ni l'un ni l'autre. Les pointes des surfaces se brisent en frottant les unes contre les autres ; et, comme le nombre de ces pointes est proportionnel à l'étendue de la surface, il est évident que la grandeur de la surface doit entrer pour quelque chose dans l'intensité du frottement. Il est cependant à propos d'observer que même alors la pression plus ou moins grande est la cause qui fait briser plus ou moins les pointes des surfaces, et que par conséquent elle concourt au frottement d'une maniere beaucoup plus efficace, que n'y concourt l'étendue des surfaces. Tout ce qu'on doit donc conclure dans ces sortes de cas, c'est que la pression est le principal, mais non le seul élément du frottement.

3°. Il y a encore un autre cas, qui ne peut pas être soumis à l'hypothese d'Amontons ; c'est celui d'un corps pointu, ou tranchant, qui se meut sur un plan; car alors la pointe, ou le tranchant, sillonne ou laboure le plan, et y éprouve une résistance qui n'est pas exactement de la même nature que le frottement ordinaire.

257. Mon objet étant seulement ici de considérer le frottement des corps qui sont prêts à se mouvoir, je ne dirai qu'un mot du frottement des corps qui se meuvent actuel-

lement. Il paroît au premier coup-d'œil que la vîtesse doit augmenter le frottement; car plus un corps se meut vîte, plus il y a de pointes à dégager, ou de ressorts à plier. Désaguliers a fait plusieurs expériences (1) dans lesquelles le frottement de corps en mouvement s'est trouvé en effet proportionnel à leur vîtesse. Cependant il peut arriver que la vîtesse n'augmente pas sensiblement le frottement; car si, d'un côté, à mesure que la vîtesse augmente, il y a plus de pointes à dégager, ou de ressorts à plier, il peut se faire, d'un autre côté, que cette même vîtesse ne donne pas à la pression le temps d'engager les pointes dans les cavités, si profondément que le permettroit une moindre vîtesse. Or une diminution d'engrenage semble devoir produire une diminution de frottement. La théorie et l'expérience n'ont encore rien prononcé de parfaitement satisfaisant sur ces objets.

258. Je viens à la maniere d'estimer le frottement dans les machines prêtes à se mouvoir. Je supposerai, avec Amontons, que le frottement est proportionnel à la simple pression. Cette hypothese est admissible pour les machines ordinaires, et sur-tout pour les machines en grand. Car ordinairement les pieces dont elles sont composées ont une certaine dureté; et on a soin d'éviter qu'elles ne frottent les unes contre les autres, ni par des pointes, ni par des tranchants. D'un autre côté, il n'y a jamais une extrême différence entre les pressions qu'éprouvent les différentes pieces d'une machine; et d'ailleurs, si cette différence étoit assez grande pour que les rapports des frottements aux pressions fussent sensiblement différents, on prendroit, pour exprimer chacun de ces rapports, des nombres convenables. On ne doit pas oublier que les résultats de tous ces calculs ne peuvent jamais être vrais qu'à-peu-près.

---

(1) Cours de physique expérimentale.

259. Il est inutile d'avertir qu'en supposant le frottement proportionnel à la pression, on ne doit pas entendre que le rapport de ces deux forces soit toujours le même. Il varie, suivant que les surfaces frottantes sont plus ou moins polies. Dans les corps qui glissent sans tourner, le frottement peut être le tiers ou le quart, ou toute autre partie de la pression, cela n'a rien de fixe, et dépend du degré de polissure des surfaces. Dans les corps qui tournent, le frottement est beaucoup moindre, comme nous l'avons déja dit; il peut être la sixieme, ou la huitieme, ou, etc., partie de la pression, selon que les surfaces sont plus ou moins dures et unies. Ainsi cette expression, *le frottement est proportionnel à la pression*, signifie que la résistance du frottement est égale à une certaine partie de la force qui presse les deux surfaces frottantes l'une contre l'autre, et ne dépend que de cette force combinée avec le degré de polissure des surfaces, et nullement de leur étendue.

Du Frottement dans le Levier.

260. Le levier est peu sujet au frottement, et on peut se dispenser d'y avoir égard, dans la plupart des usages qu'on fait de cette machine; mais le frottement n'est pas à négliger dans les balances, sur-tout lorsqu'elles sont destinées à peser des poids un peu considérables. Voici la maniere d'évaluer cette résistance.

261. Que le levier AB (Fig. 133) représente le fléau d'une balance, traversé perpendiculairement par l'aissieu horizontal fhi, qui tourne sur des appuis fixes. Supposons que les deux bras cA, cB, soient parfaitement égaux et également pesants. Dans le simple état d'équilibre mathématique, les deux poids P, Q, suspendus aux extrémités du fléau, devroient être égaux; mais, à cause du frottement, il pourra se faire qu'on augmente l'un des poids, sans que pour cela l'équilibre se rompe. Je suppose qu'on

ajoute au poids P un petit poids p, tel que l'équilibre commence à se rompre, et que la balance tende à s'incliner du côté de A. La résultante des deux poids $(P+p)$, et Q, passe entre les points A et c. Ainsi, s'il étoit question de détruire cette résultante pour établir l'équilibre, il faudroit lui opposer un appui dans sa direction : mais ici la rotation se fait nécessairement autour du centre c; d'où il suit que ce point est toujours le centre d'équilibre; et qu'en conséquence le frottement de l'aissieu sur son moyeu peut être regardé comme une force qui est dirigée suivant la tangente fg, et qui fait équilibre séparément au poids p, tandis que les deux poids égaux P et Q se font équilibre aussi séparément. Cela posé, nommons,

le rayon de l'aissieu . . . . a,
le bras cA ou cB de la balance . . . . . b,
le rapport du frottement à la pression, c'est-à-dire,

$\frac{\text{frottement}}{\text{pression}}$ . . . . $\frac{n}{1}$ ou n.

Il est clair que la pression des appuis, après l'addition du poids p, est $2P+p$, et que par conséquent le frottement est $n(2P+p)$. Or le bras de levier de ce frottement est a, et celui du poids p qui lui fait équilibre est b. On aura donc (146), $n(2P+p) \times a = p \times b$; d'où l'on tire $p = \frac{2naP}{b-na}$. Ainsi on connoît le poids p destiné à vaincre le frottement.

Exemple.

Supposons que chacun des poids P et Q soit de 200 liv.; que le rayon de l'aissieu soit la centieme partie du bras de la balance, et que le frottement soit $\frac{1}{5}$ de la pression; c'est-à-dire, $P = 200$ lb; $\frac{a}{b} = \frac{1}{100}$; $n = \frac{1}{5}$. On trouvera $p = \frac{400 \text{ lb}}{499}$. Ainsi, pour vaincre le frottement en ce cas, il faut ajouter environ les $\frac{4}{5}$ d'une livre.

Du Frottement dans les Poulies.

262. Le frottement, dans la poulie simple et fixe, et chargée de deux poids, se determine comme pour la balance. Cela est évident, en imaginant que du centre c on a décrit, avec le rayon cA, ou cB, un cercle qui représente la poulie. La formule $p=\frac{2naP}{b-na}$ s'appliquera donc ici, si, tout restant d'ailleurs le même, on entend par b le rayon de la poulie, et par a celui de son aissieu.

Si les directions des forces appliquées à la poulie n'étoient pas paralleles, le frottement se détermineroit, comme nous le verrons ci-dessous pour le tour.

263. Pour montrer la maniere dont le frottement doit être évalué dans les poulies mobiles, reprenons la Figure 92, où tous les cordons BD, AF, HE, IK, RO, NQ, sont paralleles et verticaux. Je suppose que toutes les poulies C, G, M, sont égales entre elles, et ont des aissieux égaux. Dans le simple état d'équilibre, et abstraction faite du frottement, les cordons DB, FA, sont tendus chacun avec une force qui est la moitié du poids P; les cordons EH, IK, sont tendus chacun avec une force qui est la moitié de la tension de chacun des deux premiers, et par conséquent le quart du poids P, etc.; en sorte que la tension du cordon QN, ou la puissance Q, est la huitieme partie du poids P. Mais, lorsqu'on a égard au frottement, les tensions des cordons augmentent nécessairement. Nommons,

le rayon de chaque aissieu . . . . a,
celui de chaque poulie . . . . b,
le rapport du frottement à la pression . . . . n,
les tensions des cordons FA, KI, QN . . . . X, Y, Z,
les parties de ces tensions, destinées à vaincre les frottements dans les trois poulies C, G, M . . x, y, z.

Cela posé, 1°. dans la poulie C, la pression sur l'aissieu

est P, et par conséquent le frottement est nP. Nous ne faisons pas entrer dans cette valeur du frottement la force x, parceque, la poulie étant mobile, la force x tend à la soulever, et ne paroît pas devoir contribuer, du moins d'une maniere sensible, au frottement contre l'aissieu. On aura donc, $x \times b = nP \times a$, ou $x = \frac{nPa}{b}$; et par conséquent $X = \frac{P}{2} + x = P \times \left(\frac{b + 2na}{2b}\right)$.

2°. Par les mêmes raisons, la pression dans la poulie G est X, et le frottement $= nX$. Ainsi on aura, $y \times b = nX \times a$, ou $y = \frac{nXa}{b}$; et par conséquent $Y = \frac{X}{2} + y = X \times \left(\frac{b + 2na}{2b}\right)$.

3°. On a de même, dans la poulie M, $z \times b = nY \times a$, ou $z = \frac{nYa}{b}$; et par conséquent $Z = \frac{Y}{2} + z = Y \times \left(\frac{b + 2na}{2b}\right)$.

Prenons, pour abréger, le coëfficient constant $\frac{b + 2na}{2b} = m$: il est clair qu'on aura, $X = P \times m$, $Y = P \times m^2$, $Z = P \times m^3$; ainsi de suite, s'il y avoit un plus grand nombre de poulies. On voit que les coëfficients m, m^2, m^3, vont en progression géométrique.

Si le dernier cordon NQ passoit sur une poulie fixe de renvoi, on feroit entrer le frottement de cette poulie dans le calcul, par l'article précédent. Ici il n'en est pas question.

Exemple.

Soient $P = 800$ ℔, $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$; $n = \frac{1}{5}$; et par conséquent $\frac{b + 2na}{2b} = \frac{8}{15}$. On trouvera à peu de chose près, $X = 426, 67$ ℔, $Y = 227, 55$ ℔, $Z = 121, 36$ ℔. Ainsi la tension Z, ou la puissance Q, sera d'un peu plus de 121 ℔; au lieu que, sans le frottement, elle n'auroit été que de 100 ℔.

Si on avoit cru devoir faire entrer les forces x, y, z, dans

les valeurs des frottements, on auroit trouvé des résultats peu différents des précédents, parceque les forces x, y, z, sont fort petites par rapport aux forces P, X, Y, Z.

On appliquera facilement les mêmes méthodes aux autres cas des poulies.

Du Frottement dans le Tour.

264. Soient le poids P et la puissance Q (Fig. 134), appliqués respectivement au cylindre TMC, et à la roue DRB, d'un tour dont l'aissieu est représenté par le petit cercle x. Je suppose qu'ils agissent, ou qu'il puissent être censés agir dans un même plan.

265. Imaginons qu'à la place des deux appuis, qui portent l'aissieu par ses extrémités, on substitue un appui unique, situé dans le plan du poids et de la puissance. Il est clair d'abord que le poids P produit sur cet appui une pression verticale, égale à lui-même; je la représente par la verticale AO. Soit Q la force simplement requise pour faire équilibre au poids P, et que q soit la petite force qu'il faut ajouter à Q pour vaincre le frottement. Représentons la force $Q + q$ par DE; et décomposons-la en deux autres DK, DH, l'une verticale, l'autre horizontale. La force verticale DK produit sur l'appui une pression égale à elle-même; en sorte que si l'on prolonge AO de la quantité $ON = DK$, la pression totale de l'appui, suivant la verticale, sera représentée par AN. De même, la force horizontale DH produit sur l'appui une pression horizontale, égale à elle-même; je la représente par AL, perpendiculaire à AN. Par conséquent, si l'on acheve le parallélogramme rectangle ALFN, et qu'on tire la diagonale AF, elle exprimera la pression résultante contre le point y, où la surface de l'aissieu touche l'appui ou le moyeu fixe. Cette pression occasionne le frottement, qu'on doit regarder

comme une force qui touche en y le cercle x. Nommons :

le rayon Ay de l'aissieu . . . . a,
le rayon AM du cylindre . . . . b,
le rayon AD de la roue . . . . c,
le rapport du frottement à la pression . . . n,
le sinus total 1,
le sinus de l'angle donné HDE . . . . . f,
son cosinus . . . . g.

Il est clair qu'on aura, Force DK ou ON $=(Q+q)f$; Force DH ou AL $=(Q+q)g$; Force AN $=P+(Q+q)f$; Force AF $=\sqrt{[(Q+q)^2g^2+(P+(Q+q)f)^2]}$; Frottement $=n\sqrt{[(Q+q)^2g^2+(P+(Q+q)f)^2]}$. Donc, puisque le moment de la force Q doit être égal au moment du frottement, on aura:

(A) $cq=an\sqrt{[(Q+q)^2g^2+(P+(Q+q)f)^2]}$; ou (en élevant tout au quarré, et considérant que $ff+gg=1$), $c^2q^2=a^2n^2[(Q+q)^2+P^2+2Pf(Q+q)]$; d'où l'on tire facilement:

(B) $q=\frac{a^2n^2(Q+fP)}{c^2-a^2n^2}\pm\frac{an}{c^2-a^2n^2}\times\sqrt{[(Q^2+P^2+2fPQ)\times(c^2-a^2n^2)+a^2n^2(Q+fP)^2]}$.

266. Cette formule générale est un peu compliquée. Mais nous observerons que, dans la plupart des cas qui ont réellement lieu dans la pratique, le rayon de l'aissieu étant très petit par rapport à ceux du cylindre et de la roue, la force requise pour vaincre le frottement doit être aussi très petite par rapport à P et à Q. D'où il suit que, dans le radical de l'équation (A), on peut, sans craindre beaucoup d'erreur, négliger les termes qui contiennent q. Alors cette équation devient $cq=an\sqrt{[Q^2g^2+(P+fQ)^2]}$; ou bien, $q=\frac{an}{c}\sqrt{[Q^2+P^2+2fPQ]}$: ou bien encore (en mettant pour Q sa valeur $\frac{Pb}{c}$), $q=\frac{anP}{c^2}\sqrt{[b^2+c^2+2fbc]}$, formule d'un usage assez commode.

Exemple.

Soient $P = 900$ ℔ ; $a = 1$; $b = 10$; $c = 60$; $n = \frac{1}{5}$; l'angle HDE $= 45°$, ou $f = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On trouvera $q = 3,372$ ℔ environ. Il faut donc ajouter à la puissance environ 3 ℔ et $\frac{372}{1000}$, pour vaincre le frottement ; ainsi cette puissance qui, sans le frottement, n'auroit été que de 150 livres, sera de 153,372 ℔, en ayant égard au frottement.

267. Lorsque la direction de la puissance Q est verticale, on a, $g = 0$, $f = 1$; et l'équation (B) donne, en prenant le signe supérieur du radical, $q = \frac{an(P+Q)}{c-an}$, ou $q = \frac{anP(c+b)}{c(c-an)}$.

Exemple.

Soient, comme dans l'exemple précédent, $P = 900$ ℔ ; $a = 1$; $b = 10$; $c = 60$; $n = \frac{1}{5}$. On trouvera $q = 3, 51$ ℔, à-peu-près.

268. Le problême ne sera pas plus difficile à résoudre en général, si le poids et la puissance ne sont pas dans un même plan. Alors il faudra chercher les pressions résultantes contre chaque appui (Fig. 103), comme il a été expliqué (197), en observant que si l'on nomme ici r la petite puissance qu'il faut ajouter à Q pour vaincre la résistance totale qui provient des frottements contre les deux appuis, on doit mettre $Q + r$ pour Q dans les valeurs qui ont été trouvées pour les pressions E et F, dans l'article cité. Ainsi on aura maintenant,

$$E = \frac{\sqrt{[(\pi(Q+r) \times CF)^2 + (P \times OF + \lambda(Q+r) \times CF)^2]}}{EF},$$

$$F = \frac{\sqrt{[(\pi(Q+r) \times CE)^2 + (P \times OE + \lambda(Q+r) \times CE)^2]}}{EF}.$$

Ces deux pressions produisent deux frottements, qui ont

pour valeurs respectives nE et nF, (n étant toujours le rapport du frottement à la pression), et pour bras de levier le rayon de l'aissieu, tandis que la puissance r, destinée à les vaincre, a pour bras de levier le rayon de la roue ; et, comme il faut, pour l'équilibre, que le moment de la puissance r soit égal à la somme des moments des deux résistances nE, nF, il s'ensuit que si l'on nomme, comme cidessus, a le rayon de l'aissieu, c celui de la roue, on aura, $rc = an\text{E} + an\text{F}$, équation d'où l'on tirera la valeur de l'inconnue r, après y avoir substitué pour E et F leurs valeurs données ci-dessus.

Si, dans les valeurs de E et de F, on néglige les termes qui contiennent r, comme très petits par rapport aux autres, et qu'on substitue ces valeurs ainsi simplifiées, dans l'équation précédente ; on trouvera :

$$r = \frac{an}{c} \times \left(\frac{\sqrt{[(\varpi \text{Q} \times \text{CF})^2 + (\text{P} \times \text{OF} + \lambda \text{Q} \times \text{CF})^2]}}{\text{EF}} + \frac{\sqrt{[(\varpi \text{Q} \times \text{CE})^2 + (\text{P} \times \text{OE} + \lambda \text{Q} \times \text{CE})^2]}}{\text{EF}} \right).$$

Faisons une application de cette formule.

EXEMPLE.

SOIENT, comme dans les deux exemples précédents, $\text{P} = 900$ ℔ ; $n = \frac{1}{5}$; $a = 1$; $c = 60$; le rayon du cylindre $= 10$, et par conséquent $\text{Q} = \frac{\text{P}}{6}$; l'angle que la direction de la puissance fait avec l'horizon $= 45$ degrés, et par conséquent $\varpi = \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Supposons de plus $\text{CE} = \frac{\text{EF}}{4}$, $\text{OE} = \frac{3\text{EF}}{4}$, et par conséquent $\text{CF} = \frac{3\text{EF}}{4}$, $\text{OF} = \frac{\text{EF}}{4}$. On trouvera $r = 3{,}146$ ℔.

Du Frottement sur le Plan incliné.

269. SOIT un poids P (Fig. 135), posé sur un plan incliné, dont HG est la longueur, HI la hauteur, et IG la

base. Représentons ce poids par la verticale PD; et décomposons cette force en deux autres PC, PA, l'une parallele, l'autre perpendiculaire à la longueur du plan incliné. Il est clair qu'on aura, Force PC $= P \times \frac{HI}{GH}$; Force PA $= P \times \frac{IG}{GH}$. La premiere de ces deux forces, qu'on appelle la *pesanteur relative* du corps, tend à le faire glisser : la seconde produit la pression sur le plan incliné, et y occasionne un frottement de la premiere espece; de sorte qu'en nommant n le rapport du frottement à la pression, on aura, Frottement $= nP \times \frac{IG}{GH}$. Donc, si le poids est abandonné uniquement à lui-même, il ne descendra pas, à moins que sa pesanteur relative PC ne soit plus grande que le frottement, c'est-à-dire, à moins qu'on n'ait, $\frac{P \times IH}{GH} > nP \times \frac{IG}{GH}$, ou $IH > n \times IG$.

Il suit de là qu'*un corps posé sur un plan incliné, et abandonné à l'action de la pesanteur, ne descend que quand la hauteur du plan incliné est plus grande que le produit de la base multiplié par le rapport du frottement à la pression.*

270. Supposons que le corps soit prêt à descendre, ou que sa pesanteur relative soit égale à la résistance du frottement. On aura, $IH = n \times IG$, ou bien $n = \frac{IH}{IG}$. Ainsi, lorsque l'inclinaison du plan incliné est telle que le corps commence à descendre par sa seule pesanteur relative, le rapport du frottement à la pression est le même que celui de la hauteur du plan incliné à sa base. Connoissant donc le premier rapport, on connoîtra le second; ou bien, réciproquement, connoissant le second, on connoîtra le premier.

Par exemple, supposons que le frottement soit le tiers de la pression. On aura, $\frac{IH}{IG} = \frac{1}{3}$. Or, par la trigonométrie, le rapport $\frac{IH}{IG}$ peut être regardé comme celui de la tangente de l'angle IGH d'inclinaison du plan au sinus total; et on

trouve, dans les Tables trigonométriques, que ce dernier rapport étant $\frac{1}{3}$, l'angle HGI est d'environ 18° 27′. Ainsi le frottement étant supposé le tiers de la pression, l'angle d'inclinaison du plan doit être d'environ 18° 27′, pour que le corps, par sa seule pesanteur relative, soit au moment de descendre.

Si, au contraire, l'angle d'inclinaison du plan étoit donné, on trouveroit le rapport $\frac{IH}{IG}$ par les Tables; et on auroit ensuite n par l'équation $n = \frac{IH}{IG}$. De là suit une maniere bien simple et bien commode de déterminer le frottement de la premiere espece, par la voie de l'expérience. Il ne faut pour cela que mettre un corps sur un plan d'abord très peu incliné à l'horizon, augmenter peu-à-peu l'inclinaison, jusqu'à ce que le corps commence à descendre, et observer alors le rapport de la hauteur du plan incliné à la base; ce rapport est celui du frottement à la pression.

271. CONSIDÉRONS maintenant un corps, qu'une puissance est prête à faire monter le long d'un plan incliné quelconque, en combattant la pesanteur relative et le frottement. La valeur de cette puissance est aisée à trouver en général; mais nous nous contenterons de résoudre le problême pour les deux cas les plus ordinaires; c'est-à-dire, lorsque la direction de la puissance est parallele à la longueur, ou à la base du plan incliné. On imitera facilement la même méthode dans les autres cas.

272. JE suppose donc, en premier lieu, que la puissance Q (Fig. 136) soit parallele à la longueur du plan incliné. Pour que le corps commence à glisser dans le sens GH, il faut que la force Q soit égale à la somme de la pesanteur relative du corps, et du frottement. Or, en construisant, comme ci-dessus, le parallélogramme rectangle PADC, et nommant toujours n le rapport du frottement à la pression,

13.

on a, Force PC $= P \times \frac{HI}{HG}$; Force PA $= P \times \frac{IG}{HG}$; Frottement $= nP \times \frac{IG}{HG}$. Nous aurons donc, $Q = P \times \frac{HI}{HG} + nP \times \frac{IG}{HG}$; formule où l'on voit la quantité pour laquelle le frottement entre dans l'expression de la puissance Q.

EXEMPLE.

SOIENT le poids $P = 8000$ ℔; l'angle d'inclinaison HGI du plan, de 30°, ou $\frac{HI}{HG} = \frac{1}{2}$; $\frac{IG}{HG} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$, à-peu-près; $n = \frac{1}{3}$. On aura, $Q = 4000$ ℔ $+ 2309,333$ ℔. La puissance Q sera donc d'un peu plus de 6309 livres, tandis qu'abstraction faite du frottement, elle n'auroit été que de 4000 ℔.

273. EN second lieu, que la puissance Q (Fig. 137) soit parallele à la base du plan incliné. Ayant décomposé, comme ci-dessus, le poids du corps en deux forces PC, PA, l'une parallele, l'autre perpendiculaire au plan incliné, je décompose pareillement la puissance Q, exprimée par la partie PO de sa direction, en deux autres forces PN, PM, l'une parallele, l'autre perpendiculaire à la longueur du plan incliné. On aura, Force PC $= P \times \frac{HI}{HG}$; Force PA $= P \times \frac{IG}{HG}$; Force PN $= Q \times \frac{IG}{HG}$; Force PM $= Q \times \frac{IH}{HG}$. La pression totale du plan incliné étant égale à la somme des deux forces PA, PM; si l'on nomme toujours n le rapport du frottement à la pression, il est clair qu'on aura, Frottement $= n \times \left(P \times \frac{IG}{HG} + Q \times \frac{IH}{HG}\right)$. Cela posé, pour que le corps commence à glisser dans le sens GH, il faut que la force PN soit égale à la somme de la force PC, et du frottement : on aura donc alors, $\frac{Q \times IG}{GH} = \frac{P \times HI}{HG} + n \times \left(P \times \frac{IG}{HG} + Q \times \frac{HI}{HG}\right)$; d'où l'on tire $Q = \frac{P \times (HI + n \times IG)}{IG - n \times IH}$.

S'il n'y avoit point de frottement, la valeur de la puissance seroit $\frac{P \times HI}{IG}$. Ainsi, $\frac{P \times (HI + n \times IG)}{IG - n \times IH} - \frac{P \times HI}{IG}$, ou . . . $\frac{nP \times \overline{HG}^2}{\overline{IG}^2 - n \times IG \times IH}$ est la quantité pour laquelle le frottement concourt à augmenter la puissance.

Exemple.

Soient $P = 8000$ ℔; l'angle HGI $= 30^\circ$, ou $\frac{HI}{HG} = \frac{1}{2}$, $\frac{IG}{HG} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$; $n = \frac{1}{3}$. On trouvera $Q = 9022$ ℔ environ. Sans le frottement, la puissance ne seroit que d'environ 4619 ℔.

Du Frottement dans la Vis.

274. Reprenons ici la construction et la démonstration de l'article 233. La petite puissance r (Fig. 125 et 126), qui fait équilibre au petit poids p, en agissant suivant une direction tangente à la circonférence dont CP est le rayon, a pour valeur $p \times \frac{AB}{\text{circ. } Cp}$, abstraction faite du frottement. Soit r' la petite puissance qui, agissant de la même maniere, fait équilibre au même poids, en ayant égard de plus au frottement. Il est clair, par l'article précédent, combiné avec l'article 233, qu'on aura,

$$r' = \frac{p \times (AB + n \times \text{circ. } Cp)}{\text{circ. } Cp - n \times AB}.$$

Maintenant, à la place de la puissance r', substituons-en une autre q', qui agisse en Q, suivant une direction perpendiculaire à l'axe de la vis. On aura, $r' : q' :: CQ : Cp$; ou bien, $q' = r' \times \frac{Cp}{CQ}$. Donc, en mettant pour r' sa valeur,

$$q' = p \times \frac{Cp \times (AB + n \times \text{circ. } Cp)}{CQ \times (\text{circ. } Cp - n \times AB)}.$$

Dans cette expression de q', la ligne Cp est inconnue et variable ; mais comme le poids total P est distribué sur tout le filet de la vis, nous pouvons supposer, sans craindre d'erreur sensible dans la pratique, que ce même poids est placé sur la circonférence d'un cercle qui a pour rayon la moyenne arithmétique entre le rayon du cylindre à nu, et le même rayon augmenté de l'épaisseur formée par le relief du filet de la vis. Supposons que Cp soit cette moyenne arithmétique, qui est une quantité constante et donnée, et nommons Q' la somme de toutes les puissances q', qui font équilibre à la somme de tous les poids p et au frottement ; nous aurons sensiblement, $Q' = P \times \frac{Cp \times (AB + n \times \text{circ. } Cp)}{CQ \times (\text{circ. } Cp - n \times AB)}$, valeur que doit avoir la puissance Q', appliquée en Q, pour que l'écrou soit au moment de tourner, et le poids de s'élever le long des filets de la vis, malgré sa pesanteur et la résistance du frottement.

Du Frottement dans le Coin.

275. L'ESSAI de calcul que je vais donner pour déterminer le frottement dans le coin, ne doit être regardé que comme un problème de géométrie, qui est simplement relatif à la matiere en question, et qui vraisemblablement n'aura jamais d'application dans la pratique ; car la théorie mathématique de l'équilibre de cette machine étant encore imparfaite, comme nous l'avons remarqué, on sent que celle de son frottement doit l'être bien davantage. Quoi qu'il en soit, voici comment on pourroit évaluer le frottement dans le coin, si cet instrument et les parties du corps à fendre étoient d'une dureté et d'une inflexibilité parfaites.

276. SOIT un coin isocele AED (Fig. 139), introduit dans la fente d'un corps MN, et chargé, au milieu de sa tête horizontale AD, d'un poids P, qui seroit en équilibre avec les résistances du corps à fendre, s'il n'y avoit point de

frottement. Supposons que, pour vaincre le frottement, ou pour faire glisser les faces du coin le long de celles de la fente, il faille ajouter au poids P un autre poids p. Représentons le poids résultant $P + p$, par la partie BF de sa direction; et décomposons-le en deux autres forces BC, BK, perpendiculaires aux points d'attouchements des faces du coin avec celle de la fente. Chacune de ces deux forces égales sera exprimée par $(P + p) \times \frac{AE}{AD}$; et elles produiront chacune un frottement, qui sera exprimé par $n(P+p) \times \frac{AE}{AD}$, n étant toujours le rapport du frottement à la pression. De ces deux frottements égaux, que je représente par les côtés Eg, Eh, du parallélogramme lozange Egfh, résulte, dans le sens vertical EO, une résistance exprimée par la diagonale Ef: résistance qui, à cause de Ef, double de Et, et des triangles semblables Egt, EAO, a évidemment pour valeur $2n(P + p) \times \frac{AE}{AD} \times \frac{EO}{EA}$, ou $2n(P+p) \times \frac{EO}{AD}$; et, comme cette même résistance doit être égale au poids p destiné à lui faire équilibre, on aura $p = 2n \times (P + p) \times \frac{EO}{AD}$; d'où l'on tire, $p = \frac{2nP \times EO}{AD - 2n \times EO}$.

SECTION II.

De la Roideur des Cordes.

277. Il est constant par l'expérience qu'une corde donnée est d'autant plus roide, ou fait d'autant plus de difficulté à se plier, 1°. qu'elle est tendue avec plus de force, ou qu'elle est chargée d'un plus grand poids; 2°. qu'elle est plus grosse;

3°. qu'elle s'enveloppe autour d'un plus petit rouleau. Mais on ne connoît pas bien précisément la loi suivant laquelle ces trois éléments concourent à produire la roideur de la corde.

278. La plupart des auteurs, qui ont écrit sur cette matiere, prennent pour hypothese que *la roideur d'une corde est en raison composée du poids qui tend la corde, du rayon de la corde, et de l'inverse du rayon du rouleau autour duquel elle s'enveloppe.* Cette regle, que j'adopte, comme assez conforme à l'expérience, suppose que les différentes cordes dont on veut comparer les roideurs, sont de même espece, c'est-à-dire également neuves, également torses, etc.

La vitesse avec laquelle une corde se plie, influe aussi sur sa roideur; mais nous n'aurons pas égard à cette circonstance, parcequ'il ne s'agit ici que de mouvements prêts à naître.

279. De tous les moyens qu'on a proposés pour éprouver la roideur des cordes, voici celui qui me paroît le plus simple et le plus exact.

Soient (Fig. 140 et 141) deux poulies OCM, VDN, parfaitement mobiles par leurs aissieux sur des appuis fixes, et chargées, à l'aide de cordes de différents diametres, la premiere, des deux poids égaux P et Q; la seconde, des deux poids aussi égaux R et S. Je suppose que, pour troubler l'équilibre, ou pour vaincre les frottements et les roideurs des cordes, il faille ajouter au poids P un petit poids connu p, et au poids R un petit poids connu r. Il s'agit de trouver directement les parties pour lesquelles les frottements et les roideurs des cordes entrent dans les poids additionnels p et r. Nommons,

le rayon de l'aissieu de la poulie OCM . . . . . a,
le rayon de cette même poulie . . . . b,
le rayon de la corde PCQ . . . . c,
le rayon de l'aissieu de la poulie VDN . . . . . l,

le rayon de cette même poulie . . . . m,
le rayon de la corde RDS . . . . h,
la partie du poids p, destinée à vaincre le frottement... x,
la partie du même poids p, destinée à vaincre la roideur de la corde PCQ . . . . y,
la partie du poids r, destinée à vaincre le frottement . z,
la partie du même poids r, destinée à vaincre la roideur de la corde RDS . . . . u,
le rapport du frottement à la pression . . . . n.

Nous avons ici cinq inconnues à déterminer; savoir, x, y, z, u, n.

1°. On a, comme il est évident, (A) $x+y=p$; (B) $z+u=r$.

2°. La pression totale sur l'aissieu de la poulie OCM, étant ici $2P+p$, il est clair (261) qu'on aura, (C) $bx=n(2P+p)a$. De même on aura, (D) $mz=n(2R+r)l$.

3°. On aura, en vertu de l'hypothese que nous avons adoptée sur la roideur des cordes, $y:u::\frac{(2P+p)c}{b}:\frac{(2R+r)h}{m}$; d'où l'on tire, (E) $bh(2R+r)y=cm(2P+p)u$.

Comparant ensemble les cinq équations (A), (B), (C), (D), (E), suivant les regles ordinaires de l'algebre, on trouvera:

$$x=\frac{a[(2R+r)bhp-(2P+p)cmr]}{b.(2R+r).(ah-cl)},$$
$$y=\frac{c[(2P+p)amr-(2R+r)blp]}{b.(2R+r).(ah-cl)},$$
$$z=\frac{l[(2R+r)bhp-(2P+p)cmr]}{m.(2P+p).(ah-cl)},$$
$$u=\frac{h[(2P+p)amr-(2R+r)blp]}{m.(2P+p).(ah-cl)};$$
$$n=\frac{(2R+r)bhp-(2P+p)cmr}{(2P+p).(2R+r).(ah-al)}.$$

280. Il est bon de lever, au sujet de ces formules, une difficulté analytique, qui pourroit embarrasser quelques lecteurs.

Lorsque les rayons des aissieux sont entre eux comme ceux des cordes, ou qu'on a, $ah=cl$, les dénominateurs des fractions proposées deviennent zéro, parcequ'on a, $ah-cl=0$; d'où il paroît s'ensuivre que les valeurs de x, y, z, u, n, sont infinies. Mais il faut considérer que, dans ces mêmes fractions, les numérateurs deviennent zéro dans la même hypothese. En effet, les équations (C), (D), (E), donnent, $x:z::am(2P+p):bl(2R+r)$; $y:u::cm(2P+p):bh(2R+r)$.

Mettant pour l sa valeur $\frac{ah}{c}$ dans la premiere de ces deux proportions, on aura, $x:z::cm(2P+p):bh(2R+r)$. Donc $x:z::y:u$, et $x+y:z+u::x:z::y:u$; c'est-à-dire, $p:r::am(2P+p):bl(2R+r)::cm(2P+p):bh(2R+r)$; d'où l'on tire, $blp(2R+r)=amr(2P+p)$; $bhp(2R+r)=cmr(2P+p)$; équations qui donnent, $amr(2P+p)-blp(2R+r)=0$; $bhp(2R+r)-cmr(2P+p)=0$. Donc les numérateurs des valeurs de x, y, z, u, n, deviennent zéro, en même temps que leurs dénominateurs. Donc alors ces valeurs sont indéterminées. Voici comment on peut les trouver.

281. On a ici, comme dans l'hypothese générale, $x+y=p$; $z+u=r$. De plus, à cause de $ah=cl$, on a, comme on l'a vu, $x:z::y:u$, ou $xu=yz$. On a encore, $bx=n(2P+p)a$. Voilà quatre équations entre les cinq inconnues x, y, z, u, n; et on ne peut pas en former d'autres qui ne reviennent, dans le fond, à ces quatre-là. Ainsi le problême est indéterminé. Mais si l'on suppose, par exemple, que x soit une certaine partie *donnée* de p; c'est-à-dire, si l'on fait $x=\frac{p}{t}$, t étant un nombre positif plus grand que l'unité, on trouvera, $y=p-\frac{p}{t}$, $z=\frac{r}{t}$, $u=r-\frac{r}{t}$, $n=\frac{bp}{t(2P+p)a}$. On voit qu'il faut se donner l'une des cinq inconnues, pour pouvoir déterminer les quatre autres.

282. J'AI fait quelques expériences sur la roideur des cordes. En voici une que je crois fort exacte, et qui s'accorde assez bien avec les calculs précédents.

On a suspendu bien à-plomb une poulie fort légere, qui avoit 10 pouces 6 $\frac{1}{2}$ lignes de diametre à nu. Elle étoit traversée quarrément par un aissieu de buis de huit lignes de diametre, et elle tournoit librement sur les appuis de cet aissieu. J'ai pris deux cordes neuves, peu torses, dont la premiere avoit neuf lignes de diametre, la seconde treize lignes de diametre; et, ayant appliqué successivement ces deux cordes à la poulie, j'ai attaché à chacun des deux bouts de la corde, dans les deux cas, un poids de 100 livres 12 onces. Cela fait, j'ai trouvé que, pour commencer à faire descendre l'un des poids, ou pour vaincre le frottement et la roideur de la corde, il falloit ajouter un poids de 6 livres lorsqu'on se servoit de la petite corde, et un poids de 7 livres 8 onces lorsqu'on se servoit de la grosse corde.

En supposant que l'action d'une corde s'exerce suivant la direction de son axe, il est clair que, lorsqu'on se sert de la petite corde, le diametre de la poulie proposée doit être censé de 11 pouces 3 $\frac{1}{2}$ lignes, et qu'en se servant de la grosse corde, le diametre de la poulie est de 11 pouces 7 $\frac{1}{2}$ lignes. Nous aurons donc ici, $P = R = 100$ livres 12 onces $= 100{,}75$ livres; $p = 6$ livres; $r = 7$ livres 8 onces $= 7{,}5$ livres; $2P + p = 207{,}5$ livres; $2R + r = 209$ livres; $2a = 2l = 8$ lignes; $2b = 135{,}5$ lignes; $2m = 139{,}5$ lignes; $2c = 9$ lignes; $2h = 13$ lignes. Mettons ces valeurs dans les formules générales de l'article 279, nous trouverons, à peu de chose près:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2{,}251 \\ y &= 3{,}749 \\ z &= 2{,}158 \\ u &= 5{,}342 \end{aligned}\right\}\text{ livres.}$$

$$n = 0{,}1837,\ \text{nombre abstrait.}$$

D'où l'on voit que, pour vaincre le frottement, il faut, dans l'un et l'autre cas, un poids d'un peu plus de 2 livres; mais que la roideur de la petite corde est équivalente à un poids d'un peu moins de 4 livres, et celle de la grosse à un poids d'un peu plus de 5 livres. On voit aussi que le frottement est un peu plus que la sixieme partie de la pression.

283. Je finis par l'application de nos principes à une *grue*, propre à élever des pierres, ou autres fardeaux très pesants.

Dans cette machine (Fig. 142), le poids P est suspendu à une poulie a, embrassée par une corde dont la partie 1 est attachée à un crochet fixe; l'autre partie passe sur la poulie b, sur la poulie c, et va s'entortiller autour du cylindre OF. Une puissance Q, appliquée à la circonférence de la roue QN, est au moment de faire monter le corps P, en surmontant sa pesanteur, le frottement et la roideur de la corde. Pour soutenir la corde dans l'intervalle bc, on a mis en d et e deux petits rouleaux, qui, étant très mobiles sur leurs aissieux, et n'éprouvant qu'une très légere pression, ne peuvent occasionner qu'un frottement insensible, et par conséquent négligeable. Je nomme en général,

le rayon de l'aissieu de chacune des trois poulies égales a, b, c . . . . a,
le rayon de chacune des mêmes poulies, en y comprenant celui de la corde . . . . b,
le rayon de la corde . . . . c,
le rayon des tourillons du cylindre . . . . f,
le rayon du cylindre, en y comprenant celui de la corde . . . . g,
le rayon de la roue . . . . k,
l'effort qu'il faut ajouter à la tension du cordon 2, pour vaincre tout à la fois le frottement et la roideur de la corde . . . . x,
la tension totale du même cordon . . . . X,

l'effort qu'il faut ajouter à la tension du cordon 3, pour vaincre tout à la fois le frottement et la roideur de la corde . . . . y,

la tension totale du même cordon . . . . Y,

l'effort qu'il faut ajouter à la tension du cordon 4, pour vaincre tout à la fois le frottement et la roideur de la corde . . . . z,

la tension totale du même cordon . . . . Z,

le rapport du frottement à la pression . . . . . . n,

De plus, je suppose qu'une corde, dont le rayon est h, sous une pression connue, que je nomme N, en se pliant autour d'une poulie dont le rayon augmenté de celui de la corde est m, ait une roideur égale à un poids q. Ces quantités h, N, m, q, sont données par l'expérience rapportée dans l'article précédent.

Cela posé, 1°. on voit (263) que la poulie a étant mobile, et les deux cordons 1, 2, étant verticaux, du moins sensiblement, le frottement de l'aissieu de cette poulie est nP; et comme ce frottement a pour bras de levier le rayon de l'aissieu, tandis que la force employée à le vaincre, et appliquée au cordon 2, a pour bras de levier le rayon de la poulie; il s'ensuit que l'expression de cette derniere force est $\frac{nPa}{b}$. De plus, on observera qu'en faisant cette proportion $\frac{Nh}{m} : q :: \frac{Pc}{b}$: un quatrieme terme, ce quatrieme terme $\frac{qmcP}{bhN}$ exprimeroit (278) la roideur de la corde appliquée à la poulie a, si cette poulie étoit fixe; mais comme cette poulie est mobile, et qu'au moment où elle est un peu soulevée par la force appliquée au cordon 2, il se fait dans la corde un petit mouvement angulaire au point i: il paroît que la corde doit faire à-peu-près la même difficulté à se plier, que si on l'enveloppoit sur une poulie fixe, qui auroit pour rayon le diametre de la poulie a. Ainsi sa roideur sera représentée, au moins sensiblement, par $\frac{qmcP}{2bhN}$. Cette force,

jointe au frottement, doit être égale à x; ce qui donne, $x = \frac{naP}{b} + \frac{qmcP}{2bhN}$. Donc, à cause de $X = \frac{P}{2} + x$, on aura, $X = \frac{P}{2} + \frac{naP}{b} + \frac{qmcP}{2bhN}$; ou bien, $X = \frac{P}{2} \times \left(1 + \frac{2na}{b} + \frac{qmc}{bhN}\right)$.

2°. S'il n'y avoit point de frottement ni de roideur de corde à vaincre pour la poulie fixe b, les deux cordons 2 et 3 seroient tendus également, avec une force exprimée par X; et il est évident que ces cordons étant, au moins sensiblement, l'un vertical, l'autre horizontal, il est clair, dis-je, qu'en vertu de leurs tensions, il résulteroit, aux appuis de l'aissieu de cette poulie, une pression exprimée par $X\sqrt{2}$; mais ici la pression est exprimée à la rigueur par $\sqrt{[X^2+Y^2]}$. Néanmoins, comme Y ne differe pas beaucoup de X, et qu'en supposant ces deux quantités égales entre elles, le calcul devient beaucoup plus simple, je prendrai $X\sqrt{2}$ pour la valeur approchée de la pression. Ainsi, dans la poulie fixe b, l'expression du frottement sera $nX\sqrt{2}$; et celle de la roideur de la corde sera $\frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN}$. Le frottement ayant pour bras de levier le rayon de l'aissieu, tandis que la force destinée à le vaincre, et appliquée au cordon 3, a pour bras de levier le rayon de la poulie, il est clair que la valeur de cette derniere force est $\frac{naX\sqrt{2}}{b}$. Joignons-la à la roideur $\frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN}$; et nous aurons une somme qui doit être égale à y: ce qui donne, $y = \frac{naX\sqrt{2}}{b} + \frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN}$. Donc, à cause de $Y = X + y$, on aura, $Y = X + \frac{naX\sqrt{2}}{b} + \frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN}$; ou bien, $Y = X \times \left(1 + \frac{na\sqrt{2}}{b} + \frac{qmc\sqrt{2}}{bhN}\right)$.

3°. En raisonnant pour la poulie c, exactement de la même maniere que pour la poulie b, on trouvera, $Z = Y \times \left(1 + \frac{na\sqrt{2}}{b} + \frac{qmc\sqrt{2}}{bhN}\right)$.

Maintenant, la puissance Q doit faire équilibre à la tension Z, au frottement des tourillons du cylindre, et à la roideur de la corde qui s'enveloppe autour du cylindre. Supposons que la puissance Q agisse verticalement de haut en bas; la résistance Z agissant aussi verticalement, mais de bas en haut. Il est évident que la pression des tourillons sera $Z - Q$, et que par conséquent la valeur du frottement sera $n(Z - Q)$. Ce frottement a pour bras de levier le rayon des tourillons du cylindre. Supposons que, pour le vaincre, on emploie une force appliquée à l'extrémité du rayon du cylindre; il est clair que cette force sera $\frac{nf(Z-Q)}{g}$. Quant à la difficulté que la corde doit faire à s'envelopper autour du cylindre, nous observerons, pour la déterminer, que, conséquemment à la maniere dont nous avons fait entrer ci-dessus la tension d'une corde qui passe sur une poulie, et qui est chargée de deux poids, dans l'expression de sa roideur, nous devons considérer ici notre corde comme si elle étoit chargée de deux poids, exprimés chacun par Z; d'où il suit (278) que la roideur de cette même corde sera représentée par $\frac{2qmcZ}{ghN}$. Nous avons donc maintenant trois forces qui agissent à l'extrémité du rayon du cylindre; savoir, Z, $\frac{nf(Z-Q)}{g}$, $\frac{2qmcZ}{ghN}$. Ces trois forces doivent faire équilibre à la puissance Q, qui agit à l'extrémité du rayon de la roue. Donc on aura (205), $Q \times k = Z \times g + \frac{nf(Z-Q)}{g} \times g + \frac{2qmcZ}{ghN} \times g$; d'où l'on tire $Q = \frac{Z}{k+nf} \times \left(g + nf + \frac{2qmc}{hN}\right)$. Comme tout est connu ou déterminable dans le second membre, on connoîtra aussi Q.

Exemple.

Supposons le fardeau $P = 10000$ livres; le rayon de l'aissieu de chaque poulie $= 9$ lignes; le rayon de chaque

poulie, en y comprenant celui de la corde, $= 9$ pouces ; le rayon de la corde $= 15$ lignes ; le rayon des tourillons du cylindre $= 9$ lignes ; le rayon du cylindre, en y comprenant celui de la corde, $= 6$ pouces ; le rayon de la roue $=$ 6 pieds. De plus, prenons pour hypotheses que le frottement soit $\frac{1}{7}$ de la pression, et qu'une corde de 9 lignes de diametre, sous une pression de 208 livres, en se pliant autour d'une poulie de 11 pouces $3\frac{1}{2}$ lignes de diametre, ait une roideur équivalente à un poids de 4 livres, en nombre rond ; ce qui est conforme, à peu de chose près, à l'expérience de l'article 282. On aura donc, $P = 10000$ liv. ; $a = 9$ lignes ; $b = 9$ pouces ; $c = 15$ lignes ; $f = 9$ lignes ; $g = 6$ pouces ; $k = 6$ pieds ; $n = \frac{1}{7}$; $h = 4{,}5$ lignes ; $m =$ 67,75 lignes ; $N = 208$ livres : $q = 4$ livres. D'après ces données, on trouvera (en ne poussant le calcul des parties décimales que jusqu'aux milliemes), $\frac{mq}{hN} = \frac{271}{936}$; $\frac{2na}{b} + \frac{cmq}{bhN} = 0{,}073$; $\frac{na\sqrt{2}}{b} + \frac{cmq\sqrt{2}}{bhN} = 0{,}071$; $\frac{g}{k+f} = 0{,}072$; . . . $\frac{nf + \frac{2cmq}{hN}}{k+fn} = 0{,}012$; d'où il suit qu'on aura, à peu de chose près, $X = 5365$ liv. ; $Y = 5745{,}916$; $Z = 6153{,}875$; $Q = 516{,}926$.

Ainsi la puissance Q, nécessaire pour commencer à mettre le poids P en mouvement, sera de près de 517 liv. Sans le frottement et la roideur de la corde la puissance ne seroit que d'environ 417 liv., comme on peut le trouver directement (177 et 196) ; ou, comme on peut le conclure des formules précédentes, en supposant que, dans les valeurs de X, Y, Z, Q, on a, $n = 0$, $q = 0$. On voit que le frottement et la roideur de la corde augmentent la puissance d'une quantité considérable. Il est donc essentiel de ne pas négliger ces deux résistances, si l'on veut déterminer l'effet d'une machine avec une certaine précision.

On peut remarquer que, dans les poulies b et c, la corde n'embrasse pas tout-à-fait un demi-cercle ; ce qui diminue

un peu sa roideur : mais aussi nous avons négligé quelque chose dans l'estimation des pressions que souffrent les appuis des aissieux de ces poulies ; d'où résulte une espece de compensation. Ainsi les calculs précédents ne doivent pas s'éloigner beaucoup de la vérité, du moins dans les hypotheses sur le frottement et sur la roideur de la corde, qui en sont les éléments.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces recherches sur le frottement et sur la roideur des cordes avoient paru, à quelques légeres additions près, dès l'année 1763, dans la premiere édition de mon *Traité de Mécanique*. Je fis les additions dont je viens de parler, dans l'édition de 1775. Le citoyen Coulomb, aujourd'hui membre de l'Institut national, a traité la même matiere, en réunissant à la théorie de nombreuses expériences en grand, dans son excellente piece, qui remporta le prix que l'Académie des sciences avoit proposé sur ce sujet, pour l'année 1781.

Fin de la premiere Partie.

SECONDE PARTIE.

ÉLEMENTS DE DYNAMIQUE.

LIVRE PREMIER.

DU MOUVEMENT CONSIDÉRÉ EN LUI-MÊME.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux du Mouvement.

284. SUIVANT la notion générale que nous avons donnée (9) du mouvement, un corps se meut lorsqu'il passe d'un endroit de l'espace dans un autre endroit. Si, dans ce passage, sa marche est toujours la même, ou qu'en temps égaux il parcoure des espaces égaux, on dit que son mouvement est *uniforme*. Mais si, par quelque cause que ce soit, la vîtesse du mobile vient à augmenter ou à diminuer, le mouvement s'appelle *mouvement accéléré* ou *retardé*, et en général *mouvement varié*.

285. LE mouvement, quelle que soit sa nature, peut être *rectiligne* ou *curviligne*. Il est rectiligne, lorsque le mobile suit toujours la même ligne droite; et curviligne, lorsque le mobile change de direction, et décrit une courbe, ou une suite de lignes droites qui forment entre elles des angles.

286. Tout corps est indifférent par lui-même pour le repos et pour le mouvement. Car, lorsqu'un corps demeure en repos, il existe continuellement dans un même lieu; et, lorsqu'il est en mouvement, il existe successivement dans une suite de lieux A, B, C, D, etc. Or l'existence *continuée* dans un même lieu, ou l'existence *successive* dans plusieurs lieux, sont deux modifications que le corps reçoit également, sans qu'il arrive aucun changement à sa nature: autrement il faudroit dire que ce n'est pas la même chose pour un corps d'occuper à chaque instant un lieu ou un autre dans l'espace; ce qui est absurde.

287. Il suit de cette indifférence que, si un corps est en repos ou en mouvement, il persévérera dans cet état jusqu'à ce qu'une cause extérieure l'en retire.

Cette loi est confirmée par l'expérience. Les corps ne passent du repos au mouvement que lorsqu'ils sont rencontrés par d'autres corps, ou que des agents quelconques les forcent de quitter leurs places. Un boulet de canon, lancé par l'explosion de la poudre, ne perd son mouvement que par la résistance de l'air qui s'oppose continuellement à son passage, et par la pesanteur qui le ramene et l'attache à la terre. Les planetes et les cometes, qui sont de plus grandes masses, et qui se meuvent dans des espaces moins résistants, conservent plus long-temps leurs mouvements progressifs et circulaires. En général, plus le nombre des obstacles contraires au mouvement d'un corps diminue, plus le mouvement dure long-temps; en sorte que, si la résistance des obstacles devenoit absolument nulle, le mouvement se perpétueroit par lui-même à l'infini.

288. De la même indifférence il suit encore que tout corps doit opposer à son changement d'état, soit de repos, soit de mouvement, une résistance toujours proportionnelle à sa masse, résistance qu'on appelle *force d'inertie*, du mot latin *inertia*, pour signifier que le corps est comme paresseux dans son état.

14.

En effet, puisqu'un corps ne peut changer d'état, s'il n'y est excité par un agent extérieur, et qu'il enleve nécessairement à cet agent autant de force qu'il en reçoit, il doit résister à son changement d'état, avec une force qu'on peut regarder comme égale et contraire à celle qui est perdue par l'agent. Or il n'y a pas de raison pour qu'une telle résistance existe plutôt dans une molécule du corps que dans l'autre; donc elle doit être commune à toutes les molécules. Ainsi l'inertie totale est la somme de toutes les inerties particulieres; et par conséquent elle est proportionnelle à la masse entiere du corps.

On a cru, pendant long-temps, dans les écoles, que l'inertie étoit un effet de la pesanteur des corps; mais cela est une erreur manifeste. Qu'on meuve un corps sur un plan horizontal très poli, l'effet de la pesanteur est détruit, et néanmoins on éprouve une résistance, qui est d'autant plus grande que le corps contient plus de matiere. Une balle, suspendue par un fil, ne quittera son à-plomb qu'en vertu d'une force extérieure qui l'en retirera, et qu'on trouvera toujours proportionnelle à la masse, ou à la quantité de matiere de la balle. Veut-on une expérience encore plus décisive? supposons un corps qui tombe librement par sa pesanteur: si on le presse avec la main pour accélérer sa chûte, on éprouve de la résistance. Or cette résistance ne peut pas être attribuée à la pesanteur, puisque l'effort de la pesanteur s'ajoute à celui de la main, loin de lui être contraire. On ne peut pas attribuer non plus cette résistance à l'air; car l'air ne retarde la chûte du corps que d'une maniere insensible, au commencement du mouvement, sur-tout quand ce corps, comme une balle de plomb ou d'or, a beaucoup de masse relativement à son volume. Ainsi l'inertie est une propriété des corps, qui leur est essentielle, et qui est absolument indépendante de leur pesanteur. L'effet de la pesanteur peut être anéanti ou suspendu dans plusieurs cas; il l'est dans les corps qui se meuvent sur des plans horizontaux, ou qui flottent sur un fluide, etc.; mais

il n'est jamais possible de dépouiller un corps de son inertie. De quelque maniere qu'on veuille changer l'état de repos ou de mouvement du corps, on a toujours à vaincre cette même inertie qui se fait sentir dans toutes sortes de sens, et qui suit constamment le rapport de la masse.

289. On voit par-là que, si un corps a reçu une impulsion quelconque, et qu'il ne rencontre aucun obstacle dans son chemin, il se mouvra sans fin uniformément suivant la ligne droite, qui est la direction de la force par laquelle il a été mis en mouvement : car, en vertu de son inertie, il doit prendre le chemin qu'on lui prescrit, sans pouvoir par lui-même accélérer ou retarder son mouvement, ni en changer la direction. Ainsi les corps en mouvement affectent essentiellement la direction rectiligne ; et ils ne s'en écartent jamais que lorsqu'ils rencontrent des obstacles, ou qu'ils éprouvent l'action de nouvelles forces qui les obligent d'abandonner cette direction.

290. Un mouvement qui est produit par une force *unique*, et qui est par conséquent toujours rectiligne, comme nous venons de l'expliquer, s'appelle *mouvement simple*. Tel est celui que reçoit une boule d'une autre boule qui la vient choquer.

On appelle *mouvement composé* un mouvement qui résulte de l'action simultanée de plusieurs forces sur un mobile. Tel est le mouvement d'une bombe, en tant qu'il est produit ou altéré par la force impulsive de la poudre, par la pesanteur propre de la bombe, et par la résistance de l'air.

291. Quels que soient le nombre, les quantités, et les directions des forces qui agissent sur un corps, le mouvement qu'elles lui impriment peut toujours être regardé comme simple, à chaque instant. Car, ou toutes les forces agissent suivant la même ligne droite, ou leurs directions forment des angles.

Dans le premier cas, si toutes les forces agissent dans le même sens, elles produisent le même effet que produiroit une force *unique*, égale à leur somme; et, si elles agissent en sens contraires, elles produisent le même effet que produiroit une force *unique*, égale à leur différence.

Dans le second cas, l'effet résultant de toutes les forces peut être également considéré comme produit par une force unique. Car soit d'abord un corps A (Fig. 143) poussé par les deux forces P et Q, dont les directions forment un angle, et capables de lui faire parcourir dans le même temps les espaces AB, AC; ce corps parcourra la diagonale AD (32), de la même maniere que s'il étoit poussé par une force unique, représentée par AD, tandis que les puissances P et Q sont représentées par AB et AC. Qu'une troisieme force agisse sur le mobile : en combinant cette force avec la force AD, comme on a combiné ensemble les forces AB, AC, on trouvera que le corps sera mu de la même maniere que s'il étoit poussé par une force unique, représentée par la diagonale d'un second parallélogramme; ainsi de suite. Le mouvement du corps pourra donc être considéré, à chaque instant, comme produit par une force unique, qui est la résultante de toutes les forces qui agissent en ce même instant sur le corps, résultante qu'on déterminera par l'article 40.

Je suppose, comme on voit, qu'à chaque instant toutes les forces concourent en un même point, ou que le corps sur lequel elles agissent n'a qu'une étendue infiniment petite, et peut être considéré comme un point. Si le corps avoit une grandeur sensible, et que toutes les forces ne fussent pas appliquées au même point de sa masse, il pourroit être considéré comme le système de plusieurs petits corps, sollicités au mouvement par différentes forces; et ces corps élémentaires prendroient différents mouvements, que nous enseignerons à déterminer dans le second livre. Ici il s'agit seulement du mouvement d'un corps simple, et regardé comme un point mobile.

292. Qu'un corps décrive, en vertu de telles forces qu'on voudra, une courbe AMD (Fig. 144). Si nous imaginons que cette courbe soit divisée en une infinité de parties N*m*, *mn*, *nq*, etc, égales ou inégales ; chacune de ces parties pourra être regardée comme une petite ligne droite, décrite en vertu d'une force unique, qui est la résultante de toutes les forces qui agissent en cet instant sur le mobile. En effet, supposons, par exemple, qu'à chaque point de la courbe le mobile soit poussé par deux forces, l'une parallele, l'autre perpendiculaire à l'axe AB. Que les lignes infiniment petites M*r*, M*s*, représentent les espaces que ces deux forces tendent à faire parcourir séparément en un même instant, le mobile décrira, par l'action simultanée de ces deux forces, la petite diagonale M*m* du parallélogramme M*rms*. De même, le mobile étant parvenu en *m*, si les deux forces qui le poussent tendent à lui faire parcourir les petits espaces *mu*, *mt*, en un même instant : il décrira, par le concours de ces deux forces, la petite diagonale *mn*; ainsi de suite. D'où l'on voit que le mobile parcourt le petit espace M*m*, comme s'il étoit poussé par une force unique, représentée par M*m* ; qu'il parcourt le petit espace *mn*, comme s'il étoit poussé par une force unique, représentée par *mn*; etc.

Ainsi, en général, tout mouvement peut être regardé comme composé de mouvements rectilignes, et comme produit, à chaque instant, par une force unique, qui est la résultante de toutes les forces auxquelles le mobile est réellement soumis. Nous allons donc nous occuper seulement des mouvements rectilignes ; et on se souviendra que la même théorie est applicable à chaque élément du mouvement curviligne.

CHAPITRE II.

Du Mouvement uniforme.

293. Il y a cinq choses à considérer dans tout mouvement, l'espace que le mobile parcourt, la durée du mouvement, la vitesse, la masse du corps, et la force qui produit le mouvement. Ces quantités ne sont pas des êtres absolus : elles sont toujours relatives à d'autres de même nature, qui servent d'unités. Ainsi la science des propriétés générales du mouvement consiste à comparer les circonstances d'un mouvement à celles d'un autre mouvement, regardées comme connues. Nous allons commencer par comparer ensemble les mouvements uniformes, parceque ces sortes de mouvements sont les plus simples de tous, et qu'on y rapporte tous les autres.

Il n'existe peut-être pas de mouvement qui soit uniforme à la rigueur; car il y a toujours dans la nature une foule d'agents qui tendent à altérer un mouvement quelconque. Par exemple, une horloge, quelque parfaite qu'on la suppose, n'a jamais une marche rigoureusement égale et uniforme; la résistance de l'air, le frottement, les inégalités de l'engrenage, etc., sont autant de causes qui alterent la régularité du mouvement. Mais nous demandons qu'on admette ici, au moins par voie d'hypothese, l'existence du mouvement parfaitement uniforme.

Proposition I. Théorême.

294. Les *espaces parcourus par deux corps qui se meuvent uniformément, sont entre eux comme les produits de leurs vitesses par les temps des mouvements.*

Soient respectivement E et e les espaces parcourus par nos deux mobiles, V et u leurs vîtesses, T et t les temps des mouvements. On aura (13), $V = \frac{E}{T}$, $u = \frac{e}{t}$; et par conséquent $V : u :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$. D'où l'on tire, $E : e :: VT : ut$.

Corollaire.

295. La proportion précédente donne l'équation ou la formule, (A) $Eut = eVT$; d'où l'on tirera toutes les relations qui peuvent exister entre les quantités que cette formule contient.

Par exemple, *si les vîtesses sont égales, les espaces parcourus seront comme les temps.* Car, en divisant les deux membres de la formule par les quantités égales V et u, on a, $Et = eT$, et par conséquent $E : e :: T : t$.

Si les espaces parcourus sont comme les cubes des temps, les vîtesses seront comme les quarrés des temps. Car (*Hyp.*), $E : e :: T^3 : t^3$, et par conséquent $Et^3 = eT^3$. Divisant les deux membres de la formule par ces quantités égales, on aura, $\frac{u}{t^2} = \frac{V}{T^2}$, et par conséquent $V : u :: T^2 : t^2$.

On trouvera de même d'autres théorêmes pareils.

Proposition II. Théorême.

296. Dans *deux mouvements uniformes, les forces motrices sont en général comme les produits des masses par les vîtesses.*

La force motrice étant la cause qui produit le mouvement, elle doit être proportionnelle à la *quantité* de mouvement. Or la quantité de mouvement est le produit de la masse par la vîtesse; car il y a d'autant plus de mouvement, qu'il y a plus de parties qui se meuvent, et qu'elles se meuvent plus vîte; en sorte que la quantité totale de mouvement est en raison composée du nombre de molécules,

ou de la masse entiere du corps, et de la vitesse commune à toutes les molécules. Donc, si l'on nomme F et f les forces motrices de deux corps M et m, qui se meuvent uniformément avec les vîtesses V et u, on aura, $F:f::MV:mu$.

COROLLAIRE.

297. CETTE proportion donne la formule, (B) $Fmu = fMV$, qui sert à démontrer plusieurs théorêmes en particulier.

Par exemple, *si les masses sont en raison inverse des vîtesses, les forces seront égales*. Car (*Hyp.*), $M:m::u:V$, et par conséquent $mu = MV$. Divisant les deux membres de la formule par ces quantités égales, on aura, $F = f$.

Si les masses sont entre elles comme les nombres 6 *et* 5, *et les vîtesses comme les nombres* 17 *et* 11, *les forces seront comme les nombres* 102 *et* 55. Car, mettant dans la formule 6 pour M, 5 pour m, 17 pour V, 11 pour u, on aura, $F \times 5 \times 11 = f \times 6 \times 17$, et par conséquent $F:f::102:55$.

PROPOSITION III. THÉORÊME.

298. DANS *deux mouvements uniformes, les forces motrices, multipliées par les temps, sont en général comme les produits des masses par les espaces parcourus.*

Si l'on divise membre à membre la formule (B) par la formule (A), on aura, $\frac{Fm}{Et} = \frac{fM}{eT}$,
d'où l'on tire, $FT:ft::ME:me$.

COROLLAIRE.

299. DE LA suit la formule (C) $FTme = ftME$, dont on fera des usages semblables à ceux qu'on a faits des précédentes.

Par exemple, *lorsque les masses sont en raison réciproque des espaces, les forces sont en raison réciproque des temps.*

Car (*Hyp.*) $M : m :: e : E$, et par conséquent $me = ME$. Divisant les deux membres de la formule par ces deux quantités égales, on aura, $FT = ft$, et par conséquent $F : f :: t : T$.

Si les masses sont égales, et que les quarrés des temps soient comme les cubes des espaces, les forces seront en raison réciproque des racines quarrées des espaces. Car (*Hyp.*), $m = M$, et $T^2 : t^2 :: E^3 : e^3$, ou $T : t :: E\sqrt{E} : e\sqrt{e}$. Ainsi on aura, $mTe\sqrt{e} = MtE\sqrt{E}$. Divisant les deux membres de la formule par ces quantités égales, on aura, $\frac{F}{\sqrt{e}} = \frac{f}{\sqrt{E}}$, et par conséquent $F : f :: \sqrt{e} : \sqrt{E}$.

CHAPITRE III.

Du Mouvement uniformément accéléré, ou retardé, en général.

300. Nous avons établi (289) qu'abstraction faite de tout obstacle et de toute force étrangere, un corps, une fois mis en mouvement, continueroit sans fin à se mouvoir uniformément. Ainsi le mouvement ne peut devenir accéléré ou retardé, d'un instant à l'autre, que par l'intervention d'une nouvelle force, constante ou variable, qui agisse sans cesse sur le mobile, dans le sens de son mouvement, ou dans le sens contraire.

301. Cette force toujours agissante s'appelle *force accélératrice*, ou *force retardatrice*. Chaque degré de vitesse qu'elle produit ou qu'elle détruit à chaque instant est infiniment petit : car, en un temps fini, qui est la somme d'une infinité d'instants, la vitesse entiere, qui est produite par la force accélératrice, ou détruite par la force retarda-

trice, et qui est la somme de tous les degrés de vitesse produits ou détruits d'un instant à l'autre, est une quantité finie, qui a par conséquent pour éléments des parties infiniment petites.

302. PAR-LA on comprend la distinction qu'il faut mettre entre la force d'un corps qui se meut d'un mouvement actuel et fini, et la force accélératrice ou retardatrice. La premiere, qui exprime l'action dont le corps est capable, et qu'on peut appeler *force de percussion*, est infinie par rapport à la seconde, qui est une simple *pression*. On peut regarder la force de percussion comme la somme d'une infinité de pressions accumulées pendant un temps fini. Ainsi, par exemple, si un corps tombe par sa pesanteur de 45 pieds de haut, la force qu'il aura au dernier instant de sa chûte, ou le produit de sa masse par sa vîtesse finale, sera la somme de tous les coups que la pesanteur lui aura donnés, pendant chacun des instants qui composent par leur assemblage le temps total de la chûte.

D'après cette distinction, on explique pourquoi un médiocre coup de marteau fait enfoncer un clou, tandis qu'un poids considérable, privé de mouvement, et agissant seulement par sa pesanteur sur la tête du clou, ne produit aucun enfoncement sensible. Le coup de marteau est une force finie, qui s'évalue par le produit d'une masse finie par une vîtesse finie; au lieu que le poids, destitué de mouvement local, est une force infiniment petite, qui s'évalue par le produit d'une masse finie, par une vîtesse infiniment petite.

303. LA force accélératrice (il en est de même de la force retardatrice) peut être ou *absolue* ou *simple*. La force accélératrice, qui met en mouvement une masse finie proposée, s'appelle *force accélératrice absolue :* le rapport de la force accélératrice absolue à la masse, ou, ce qui revient au même, la force accélératrice qui meut l'*unité de masse*,

s'appelle *force accélératrice simple* : d'où l'on voit que la force accélératrice absolue est le produit de la force accélératrice simple par la masse du corps. Ainsi, lorsqu'un corps tombe par sa pesanteur, le poids absolu de ce corps, ou la force qui accélere à chaque instant toute sa masse de haut en bas, est sa force accélératrice absolue; et le poids particulier de chacune des molécules élémentaires égales dont on peut imaginer qu'il est composé est sa force accélératrice simple, qu'on appelle ordinairement *pesanteur* ou *gravité* ; en sorte que le poids absolu du corps est le produit de la pesanteur ou de la gravité, par sa masse.

Tous les géometres admettent cette division des forces accélératrices. Lorsque, pour abréger, ils se servent de cette expression, *force accélératrice*, sans ajouter le mot *absolue*, ni le mot *simple*, ils entendent la force accélératrice simple, à moins que le sens du discours ne fasse voir qu'il s'agit de la force accélératrice absolue.

304. Comme les forces accélératrices ou retardatrices peuvent varier suivant une infinité de différentes lois, il y a aussi une infinité de différentes especes de mouvements accélérés ou retardés. On ne peut pas traiter en général la théorie de ces mouvements, sans le secours des calculs différentiel et intégral. Mais les principes établis, soit dans ce traité, soit dans ceux qui le précedent, suffisent pour les mouvements uniformément accélérés ou retardés, dont il va être question. Je supposerai toujours que ces mouvements sont rectilignes, et soumis seulement à l'action des forces que nous considérons, sans éprouver la résistance d'aucun obstacle.

305. On appelle *mouvement uniformément accéléré* ou *retardé* un mouvement qui a cette propriété, que si on imagine le temps partagé en une infinité d'instants égaux entre eux, la vîtesse augmente ou diminue, pendant chaque instant, d'une quantité toujours égale ; et, comme une

telle augmentation ou diminution ne peut être que l'effet d'une force accélératrice ou retardatrice, il s'ensuit que, dans ces sortes de mouvements, la force accélératrice ou retardatrice est toujours constante, ou qu'elle donne, pendant chacun des instants égaux du temps, des coups égaux au mobile.

Pour éviter la confusion et les longueurs, nous allons considérer seulement le mouvement uniformément accéléré; mais ce que nous en dirons s'appliquera, dans un ordre renversé, au mouvement uniformément retardé.

306. On voit, par la notion du mouvement uniformément accéléré, que la vîtesse finale d'un mobile qui se meut ainsi est toujours proportionnelle au temps écoulé depuis le commencement du mouvement. Car, en vertu de son inertie, le corps conserve la vîtesse qu'il a acquise; et, en vertu de la force accélératrice constante qui le poursuit sans cesse, il acquiert, pendant tous les instants égaux et successifs du temps, des degrés égaux de vîtesse. Ainsi chaque vîtesse finale est proportionnelle au nombre des instants du temps écoulé depuis le commencement du mouvement, puisque cette vîtesse n'est autre chose que la somme des degrés de vîtesse acquis et conservés depuis le premier instant où la vîtesse commence, jusqu'à l'instant qui répond à la vîtesse finale que l'on considere.

Proposition I. Théorème.

307. Si *deux corps se meuvent de mouvements uniformément accélérés, les espaces qu'ils parcourront seront entre eux comme les moitiés des produits de leurs vîtesses finales par les temps des mouvements, ou comme ces produits entiers.*

Représentons le temps du mouvement de l'un des corps par le côté AB du triangle rectangle ABC (Fig. 145), et sa vîtesse finale par l'autre côté BC. Imaginons que le temps AB

soit partagé en une infinité d'instants AD, DF, FH, etc.; et menons parallèlement à BC les droites DE, FG, HK, etc.: ces lignes exprimeront respectivement les vîtesses qui répondent à la fin des temps AD, AF, AH, etc., comptés tous depuis le point A, origine du temps et des vîtesses; car les vîtesses finales sont comme les temps; et on a, AB:AD:AF:AH:etc. :: BC:DE:FG;HK:etc. D'où il suit que BC étant la vîtesse qui répond à la fin du temps AB, les droites DE, FG, HK, etc. expriment les vîtesses qui répondent à la fin des temps AD, AF, AH, etc.

Cela posé, considérons deux vîtesses LM, ON, qui répondent, l'une au commencement, l'autre à la fin d'un instant quelconque LO; et menons MR, parallele à AB. Il est clair que les deux vîtesses LM, ON, qui ne different l'une de l'autre que de la quantité RN infiniment petite par rapport à chacune d'elles, peuvent être regardées comme égales, et que le trapeze LMNO peut être regardé comme égal au rectangle LMRO. Or, lorsque la vîtesse demeure la même, ou que le mouvement est uniforme, les espaces parcourus sont comme les produits des vîtesses multipliées par les temps (294). Ainsi le petit espace élémentaire, parcouru pendant l'instant LO, sera proportionnel à $LM \times LO$, c'est-à-dire au rectangle LMRO, ou au trapeze LMNO. On prouvera de même que tout autre espace élémentaire parcouru est proportionnel au trapeze élémentaire correspondant. Donc la somme de tous les espaces élémentaires, ou l'espace total parcouru pendant le temps AB, est proportionnel à la somme des trapezes élémentaires du triangle ABC, ou à l'aire $\frac{BC \times AB}{2}$, ou à la moitié du produit de la vîtesse finale par le temps.

Semblablement, si l'on représente le temps du mouvement de l'autre corps par le côté *ab* du triangle rectangle *abc* (Fig. 146), et sa vîtesse finale par le côté *bc*: l'espace total, parcouru par ce corps, sera proportionnel à $\frac{bc \times ab}{2}$, ou à la

moitié du produit de sa vîtesse finale par le temps de son mouvement.

Donc, en nommant respectivement E et *e* les espaces parcourus par les deux mobiles, V et *u* leurs vîtesses finales, T et *t* les temps de leurs mouvements, on aura, $E : e :: \frac{VT}{2} : \frac{ut}{2} :: VT : ut$.

COROLLAIRE.

308. De là suit la formule (A) $Eut = eVT$.

PROPOSITION II. THÉORÈME.

309. Les *produits des forces accélératrices absolues, qui animent nos deux mobiles, multipliées par les temps de leurs applications, sont entre eux comme les produits des masses par les vîtesses finales.*

La force accélératrice absolue, qui anime l'un ou l'autre corps, lui donne autant de coups égaux, qu'il y a d'instants égaux dans la durée du mouvement de ce corps; et la somme de tous ces coups est la cause de la quantité finale de mouvement, ou du produit de la masse par la vîtesse finale. Donc, si l'on nomme P et π les forces accélératrices absolues des deux mobiles, M et *m* leurs masses, V et *u* leurs vîtesses finales, T et *t* les temps de leurs mouvements, on aura, $PT : \pi t :: MV : mu$.

COROLLAIRE.

310. De là suit la formule, (B) $PTmu = \pi tMV$.

PROPOSITION III. THÉORÈME.

311. Les *forces accélératrices absolues, multipliées par les quarrés des temps, sont comme les produits des masses par les espaces parcourus.*

En divisant, membre à membre, la formule (B) par la formule (A), on aura, $\frac{PTm}{Et} = \frac{\pi tM}{eT}$. D'où l'on tire, $PTT : \pi tt :: ME : me$.

COROLLAIRE.

312. DE LA suit la formule, (C) $PTTme = \pi ttME$.

PROPOSITION IV. THÉORÊME.

313. LES *forces accélératrices absolues, multipliées par les espaces parcourus, sont comme les produits des masses par les quarrés des vîtesses finales.*

En divisant les deux membres de la formule (B) par ceux de la formule (A), pris en croix, on aura, $\frac{Pmu}{eV} = \frac{\pi MV}{Eu}$. D'où l'on tire, $PE : \pi e :: MVV : muu$.

COROLLAIRE.

314. DE LA suit la formule, (D) $PEmuu = \pi eMVV$.

REMARQUE I.

315. DANS les formules (B), (C), (D), les lettres P et π représentent, comme nous l'avons dit expressément, les forces accélératrices absolues des deux mobiles. Soient F et f les forces accélératrices simples; en sorte qu'on ait (303), $P = FM$, $\pi = fm$. Substituons ces valeurs de P et de π dans les formules que nous venons de citer; et nous aurons, en divisant tout par Mm, les trois formules, (E) $FTu = ftV$; (F) $FTTe = fttE$; (G) $FEuu = feVV$.

REMARQUE II.

316. CES différentes formules servent à comparer les

circonstances de deux mouvements uniformément accélérés, et par conséquent à déterminer tout ce qui est relatif à l'un, lorsqu'on connoît tout ce qui est relatif à l'autre. On en pourra faire des applications analogues à celles qu'on a faites, dans le chapitre précédent, des formules du mouvement uniforme. Nous traiterons, d'après ces principes, dans le chapitre suivant, du mouvement des corps graves, qui tombent librement, ou qui glissent sur des plans inclinés. Le second livre offrira plusieurs autres exemples de mouvements uniformément accélérés.

Il nous reste à expliquer le moyen de comparer le mouvement uniformément accéléré avec le mouvement uniforme.

Proposition V. Théorème.

317. Si *un corps, après s'être mu d'un mouvement uniformément accéléré, pendant un certain temps, vient à se mouvoir d'un mouvement uniforme, pendant un temps égal, avec une vîtesse égale à celle qu'il a au dernier instant du mouvement uniformément accéléré, il parcourra un espace double de celui qu'il a parcouru par ce même mouvement.*

On a vu (307) qu'en représentant le temps d'un mouvement uniformément accéléré par le côté AB du triangle rectangle ABC (Fig. 145), la vîtesse finale du mobile par le côté BC, l'espace parcouru est représenté par l'aire du triangle ABC. Or si, durant le même temps AB, le mobile se meut d'un mouvement uniforme, avec une vîtesse égale à BC, l'espace qu'il parcourra sera représenté par l'aire du rectangle ABCV, double du triangle ABC, puisque, dans ce dernier mouvement, a chaque élément du temps répond constamment une vîtesse égale à BC, et que, dans le mouvement uniforme, l'espace parcouru est comme le produit de la vîtesse par le temps. Donc, etc.

COROLLAIRE.

318. On voit par-là que tout mouvement uniformément accéléré peut être comparé avec un mouvement uniforme quelconque. Car, en vertu de l'article précédent, nous savons comparer un mouvement uniformément accéléré avec un mouvement uniforme, dont la vîtesse constante est égale à la vîtesse finale du premier ; et, suivant les principes établis pour les mouvements uniformes, nous savons comparer ensemble deux mouvements uniformes quelconques.

Finissons par une proposition sur les mouvements uniformément retardés, laquelle est d'un fréquent usage.

PROPOSITION VI. THÉORÈME.

319. Si *un corps, après s'être mu d'un mouvement uniformément accéléré, est repoussé en sens contraire avec une vîtesse initiale, égale à celle qu'il a au dernier instant du premier mouvement, et qu'il éprouve l'action d'une force retardatrice égale à celle qui l'accéléroit pendant ce même mouvement, il retournera, durant le même temps, au point d'où il étoit parti, et alors il aura perdu toute sa vîtesse.*

Cela est évident par soi-même, puisque, dans le second mouvement, la force retardatrice doit enlever successivement au corps les mêmes degrés de vîtesse qui lui avoient été communiqués par la force accélératrice, dans le premier mouvement.

Ainsi, en supposant (ce qui est vrai, comme nous le verrons tout-à-l'heure) que le mouvement des corps qui tombent par la pesanteur soit uniformément accéléré, si un corps, après être tombé d'une certaine hauteur, remonte verticalement, sans éprouver d'autre résistance que celle de la pesanteur qui agit constamment de haut en bas, il remontera à la hauteur dont il étoit descendu.

CHAPITRE IV.

Application des principes précédents au mouvement des graves, qui tombent librement, ou qui glissent sur des plans inclinés.

---

320. Il est évident d'abord que le mouvement des corps, qui tombent librement par la pesanteur, est accéléré; car plus un grave tombe de haut, plus le coup qu'il donne est grand; ce qui ne peut venir que d'une augmentation de vîtesse, puisque la masse est constante. Mais quel est le rapport que suit cette augmentation? Galilée supposa qu'elle étoit constante, ou que le mouvement des graves étoit uniformément accéléré; et l'expérience ayant confirmé cette hypothese, elle est devenue une vérité; et une loi fondamentale dans la théorie de la chûte des corps graves.

On doit observer cependant que le mouvement des graves n'est uniformément accéléré, ou, ce qui en est la cause, que la pesanteur n'est une force accélératrice constante que pour des chûtes d'une hauteur médiocre; car, comme nous l'avons déja remarqué (88), la pesanteur est variable à la rigueur, et proportionnelle au quarré inverse de la distance au centre de la terre. Mais, lorsque la hauteur dont un corps tombe est peu sensible par rapport au rayon de la terre, on peut supposer que la pesanteur est constante; et c'est ce que nous ferons ici, et dans la suite de ce traité.

321. En considérant ainsi le mouvement des corps graves, comme uniformément accéléré, la théorie générale et les formules que nous avons établies dans le chapitre précédent

s'appliquent d'elles-mêmes au mouvement dont il s'agit. Il y a plus : une circonstance particuliere à ce mouvement simplifie les résultats généraux que nous avons trouvés. Je m'explique.

322. QUELLE que soit la cause de la pesanteur, cette force pénetre toute la masse des corps : elle agit également sur toutes les molécules égales de matiere ; et le poids total d'un corps est proportionnel au nombre de molécules de matiere qui composent sa masse totale. Car, suivant l'expérience, deux corps de masses très inégales, une balle de plomb, et une plume, tombent également vîte dans le vuide, par exemple, sous le récipient de la machine pneumatique, après qu'on en a pompé l'air. D'où il suit que les poids des corps, c'est-à-dire les forces accélératrices absolues qui les font descendre, suivent la raison des masses. Car il est évident que, pour mouvoir avec la même vîtesse deux masses, qui sont exprimées, par exemple, par les nombres 100 et 1, il faut que la premiere force soit centuple de la seconde, puisque la masse 100 peut être décomposée en 100 masses, qui sont chacune 1, et qui demandent chacune, pour être mue, une force 1.

323. EN conséquence, si on a deux corps M et m, dont les poids absolus soient P et π, on aura la proportion, $P : \pi :: M : m$; ce qui donne $Pm = \pi M$. Par conséquent, les trois formules (B), (C), (D), des articles 310, 312, 314, deviendront, en divisant les deux membres par ces quantités égales, (H) $Tu = tV$; (I) $TTe = ttE$; (K) $Euu = eVV$.

La premiere nous apprend que *les vîtesses finales de deux corps qui tombent (ou d'un même corps) en différents temps, sont comme les temps.*

La seconde, que *les espaces parcourus sont comme les quarrés des temps.*

La troisieme, qui est une suite des deux autres, que *les espaces parcourus sont comme les quarrés des vîtesses finales.*

On doit se souvenir que, conséquemment à la théorie générale du chapitre précédent, les vîtesses commencent ici avec les temps, ou qu'aux commencements des temps, les corps n'ont aucune vîtesse acquise précédemment.

Ces formules représentent en général le mouvement des corps graves, tel qu'il se passeroit dans le vuide, et abstraction faite de la résistance de l'air.

324. On voit, par la formule (I), que lorsqu'on connoîtra l'espace qu'un corps grave parcourt pendant un temps donné, on connoîtra aussi l'espace que ce corps ou tout autre grave parcourt, pendant un temps aussi donné. Or l'expérience apprend que tout corps grave parcourt, à très peu près, 15 pieds 1 pouce, pendant la premiere seconde de sa chûte. Si donc on veut connoître, par exemple, combien de pieds un corps grave parcourra pendant 7 secondes, on fera cette proportion, $(1'')^2 : (7'')^2 :: 15^{\text{pi.}}\ 1^{\text{po.}}$: l'espace inconnu x; ou bien, $1 : 49 :: 15^{\text{pi.}}\ 1^{\text{po.}} : x = 739$ pieds 1 pouce.

325. Il suit de la même formule que, si l'on partage le temps de la chûte d'un grave en parties égales, les espaces parcourus pendant chacune de ces parties séparément, seront entre eux comme la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, etc. Car, en représentant la suite des temps, à compter toujours depuis zéro, par la suite des nombres naturels,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc.;

la suite des espaces parcourus, à compter aussi depuis zéro, est représentée par la suite des quarrés,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, etc.

Ainsi 1 est l'espace parcouru pendant la premiere partie du temps; 4 est l'espace parcouru pendant les deux premieres parties du temps; 9 est l'espace parcouru pendant les trois premieres parties du temps, etc. Donc, pour avoir l'espace parcouru pendant la seconde partie du temps, seule, il faut retrancher 1 de 4, ce qui donne 3 pour cet espace; pour

avoir l'espace parcouru pendant la troisieme partie du temps, seule, il faut retrancher 4 de 9; ce qui donne 5 pour cet espace, etc. D'où l'on voit que les espaces parcourus, pendant chacun des intervalles égaux du temps, en particulier, sont représentés par les termes de la suite, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, etc.

326. Nous comparerons le mouvement des corps qui tombent par la pesanteur, avec le mouvement uniforme, au moyen du probléme suivant.

Je suppose qu'un mobile se meuve uniformément, et parcoure un espace E dans un temps t. Il s'agit de déterminer la hauteur h, dont il devroit tomber, par sa pesanteur, pour acquérir la vîtesse avec laquelle il se meut.

Nommons a la hauteur *connue*, dont tombe un corps grave pendant le temps connu θ. On voit (323, Form. K), que la vîtesse finale de ce corps sera représentée par $\sqrt{a}$, et que s'il tomboit de la hauteur h, sa vîtesse finale seroit représentée par $\sqrt{h}$. D'un autre côté (317), si le même corps vient à se mouvoir uniformément, pendant le temps θ, avec la vîtesse $\sqrt{a}$, il parcourra un espace $= 2a$; et comme, par hypothese, le mobile du problême parcourt uniformément l'espace E, pendant le temps t, avec une vîtesse qui doit être représentée par $\sqrt{h}$, et que, dans les mouvements uniformes, les espaces parcourus sont comme les produits des vîtesses par les temps (294) : il s'ensuit qu'on aura la proportion, $2a : E :: \theta\sqrt{a} : t\sqrt{h}$; d'où l'on tire, $h = \frac{E^2}{4a} \times \frac{\theta^2}{t^2}$.

Dans cette formule, les deux quantités a et θ sont données, et toujours constantes; mais les trois autres E, t, h, peuvent varier; et on voit que deux d'entre elles étant données, on connoîtra la troisieme.

Supposons, par exemple, que notre mobile parcoure uniformément 100 pieds en 3 secondes; en sorte qu'on ait $E = 100$ pieds, $t = 3$ secondes. En admettant que les corps graves parcourent 15 pieds pendant la premiere seconde de

leur chûte, on aura, $a = 15$ pieds, $t =$ une seconde. Substituons toutes ces valeurs dans l'expression de h; nous trouverons, $h = 18\frac{14}{27}$ pieds. Ainsi, pour qu'un corps acquiere par sa pesanteur une vîtesse capable de lui faire parcourir uniformément 100 pieds en trois secondes, il faut qu'il tombe de $18\frac{14}{27}$ pieds de hauteur.

327. On trouve, par la même méthode, la hauteur à laquelle remontera un corps grave, lancé verticalement avec une vîtesse capable de lui faire parcourir uniformément un espace donné dans un temps donné. Car (319) un corps grave, lancé verticalement de bas en haut, avec une vîtesse égale à celle qu'il auroit acquise en tombant d'une certaine hauteur, doit remonter à cette hauteur.

328. Le problême précédent est d'un fréquent usage dans la mécanique et dans l'hydrodynamique; car on y compare très souvent les mouvements de toute espece à celui d'un corps qui tomberoit par sa pesanteur, parceque ce dernier mouvement nous est extrêmement familier, comme étant sans cesse sous nos yeux. Ainsi, au lieu de représenter la vîtesse d'un certain mouvement, par l'espace que le mobile parcourroit en un temps donné, on la désigne par la racine de la hauteur dont un corps grave auroit dû tomber pour l'acquérir. En ce sens, on dit que la hauteur dont on vient de parler est la *hauteur due* à la vîtesse proposée.

329. Je joins ici deux petites tables, dont on a souvent besoin dans la pratique. La premiere contient la suite des temps, depuis 1 seconde jusqu'à 60, et les espaces que parcourt un corps grave par sa chûte, pendant ces temps, en comptant toujours les temps et les espaces depuis zéro. La construction de cette table est fondée sur la formule(I) de l'article 323.

La seconde contient les mêmes temps que la premiere,

et les espaces qui seroient parcourus uniformément en une seconde, avec une vîtesse égale à celle qui auroit été acquise par le corps grave, pendant chaque temps correspondant, à compter toujours depuis zéro. Ces espaces se déterminent, en doublant les espaces contenus dans la premiere table, et divisant ce double par le nombre de secondes correspondantes. La construction de cette table est une suite évidente de l'article 317.

TABLE I.

TEMPS des chûtes.	ESPACES. parcourus.		TEMPS des chûtes.	ESPACES parcourus.	
Secondes.	Pieds.	Pouces.	Secondes.	Pieds.	Pouces.
0	0				
1	15	1	31	14495	1
2	60	4	32	15445	4
3	135	9	33	16425	9
4	241	4	34	17436	4
5	377	1	35	18477	1
6	543	0	36	19548	0
7	739	1	37	20649	1
8	965	4	38	21780	4
9	1221	9	39	22941	9
10	1508	4	40	24133	4
11	1825	1	41	25355	1
12	2172	0	42	26607	0
13	2549	1	43	27889	1
14	2956	4	44	29201	4
15	3393	9	45	30543	9
16	3861	4	46	31916	4
17	4359	1	47	33319	1
18	4887	0	48	34752	0
19	5445	1	49	36215	1
20	6033	4	50	37708	4
21	6651	9	51	39231	9
22	7300	4	52	40785	4
23	7979	1	53	42369	1
24	8688	0	54	43983	0
25	9427	1	55	45626	1
26	10196	4	56	47301	4
27	10995	9	57	49005	9
28	11825	4	58	50740	4
29	12685	1	59	52505	1
30	13575	0	60	54300	0

TABLE II.

Temps employés par un grave à acquérir chaque vîtesse.	Espaces parcourus uniformément en une seconde en vertu de la vîtesse acquise.		Temps employés par un grave à acquérir chaque vîtesse.	Espaces parcourus uniformément en une seconde, en vertu de la vîtesse acquise.	
Secondes.	Pieds.	Pouces.	Secondes.	Pieds.	Pouces.
0	0	0			
1	30	2	31	935	2
2	60	4	32	965	4
3	90	6	33	995	6
4	120	8	34	1025	8
5	150	10	35	1055	10
6	181	0	36	1086	0
7	211	2	37	1116	2
8	241	4	38	1146	4
9	271	6	39	1176	6
10	301	8	40	1206	8
11	331	10	41	1236	10
12	362	0	42	1267	0
13	392	2	43	1297	2
14	422	4	44	1327	4
15	452	6	45	1357	6
16	482	8	46	1387	8
17	512	10	47	1417	10
18	543	0	48	1448	0
19	573	2	49	1478	2
20	603	4	50	1508	4
21	633	6	51	1538	6
22	663	8	52	1568	8
23	693	10	53	1598	10
24	724	0	54	1629	0
25	754	2	55	1659	2
26	784	4	56	1689	4
27	814	6	57	1719	6
28	844	8	58	1749	8
29	874	10	59	1779	10
30	905	0	60	1810	0

330. Je passe au mouvement des corps qui glissent sur des plans inclinés.

Soit un corps A (Fig. 147), qui descende le long d'un plan incliné. Représentons son poids ou sa pesanteur absolue par la verticale AN, et décomposons cette force en deux autres AM, AO, l'une perpendiculaire, l'autre parallele au plan incliné BD. La premiere est détruite, et il ne reste que la seconde AO pour faire glisser le corps. Je fais abstraction du frottement et de toute autre résistance. En nommant p la pesanteur absolue du corps, F sa pesanteur *relative*, c'est-à-dire la force qui le pousse parallèlement à BD; on aura, $F = p \times \frac{AO}{AN}$. Or, à cause des triangles semblables AON, BCD, on a, $\frac{AO}{AN} = \frac{BC}{BD}$; donc $F = p \times \frac{BC}{BD}$. Par où l'on voit que la pesanteur relative est à la pesanteur absolue comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.

331. La même équation fait voir que le mouvement des corps qui glissent sur des plans inclinés, est uniformément accéléré. Car, puisque tout est constant dans l'expression de F, en quelque endroit du plan incliné que le mobile se trouve, la force F est une force accélératrice constante, qui produit en temps égaux des degrés égaux de vîtesse. Ainsi la théorie du chapitre précédent s'applique aux mouvements des corps qui glissent sur des plans inclinés.

332. Si on veut comparer le mouvement d'un corps qui glisse sur un plan incliné au mouvement d'un corps qui tomberoit librement par la pesanteur, le problême pourra se résoudre directement par le moyen des formules du chapitre précédent; mais, pour abréger, nous en déduirons la solution, comme corollaire, des formules que nous allons donner pour comparer ensemble les mouvements des corps qui glissent sur deux plans inclinés différents.

333. Soient donc deux plans inclinés comme on voudra,

parcourus par deux mobiles; et nommons respectivement, les longueurs des plans inclinés, ou les espaces

parcourus . . . . E et e,
les hauteurs de ces plans . . . . H et h,
les temps des mouvements . . . . T et t,
les masses des corps . . . . M et m,
leurs pesanteurs relatives . . . . F et f,
leurs vîtesses finales . . . . V et u.

Cela posé, 1°. la formule (A) de l'article 308 a lieu ici sans aucun changement.

2°. Les forces accélératrices absolues, que nous avons nommées P et π (309), sont ici F et f. De plus, en nommant p et π les pesanteurs absolues de nos deux corps; on a (330), $F=\frac{pH}{E}$, $f=\frac{\pi h}{e}$. Substituons, pour P et π, ces valeurs dans les formules (B), (C), (D), du chapitre précédent: nous aurons, $pHTmue=\pi htMVE$; $pHTTmee=\pi httMEE$; $pHmuu=\pi hMVV$.

Or (323) on a, $p:\pi::M:m$, ou bien $pm=\pi M$. Par conséquent, en divisant ces trois formules par ces quantités égales, nous aurons, (L) $HTeu=htEV$; (M) $HTTee=httEE$; (N) $Huu=hVV$.

Ces formules représentent de la maniere la plus simple qu'il est possible toutes les propriétés relatives des mouvements de deux corps qui glissent sur deux plans inclinés.

334. Parmi les théorêmes qu'on peut déduire de ces mêmes formules, la formule (N) fournit celui-ci qui est général. *Quelles que puissent être les longueurs de deux plans inclinés, les vîtesses finales qu'auront les deux mobiles, après les avoir parcourus, seront toujours entre elles comme les racines quarrées des hauteurs des mêmes plans.* Si donc les deux plans ont la même hauteur, les vîtesses finales seront égales, quelque différentes que puissent être leurs longueurs. On comprend qu'il s'agit toujours des vîtesses dans les sens des espaces parcourus.

Faisons quelques applications particulieres de ces formules.

Exemple I.

335. Trouver *le rapport des temps employés à parcourir deux plans également inclinés.*

Puisque les deux plans sont également inclinés, les deux triangles rectangles, qui ont pour côtés les longueurs, les hauteurs et les bases de ces plans, sont semblables ; et on a par conséquent, $E : e :: H : h$, ou $eH = Eh$. Divisant les deux membres de la formule (M) par ces quantités égales, on aura, $TTe = ttE$. D'où l'on tire, $T : t :: \sqrt{E} : \sqrt{e} :: \sqrt{H} : \sqrt{h}$. Ainsi les temps sont comme les racines des longueurs ou des hauteurs des plans inclinés.

Exemple II.

336. Trouver *le rapport des temps employés à parcourir les cordes d'un cercle vertical, menées des extrémités d'un diametre vertical.*

Soit BR le diametre vertical du cercle proposé (Fig. 148); et soient BD, BK, deux cordes quelconques menées de l'extrémité B de ce diametre; DQ, KP, les ordonnées correspondantes. Il est clair qu'on peut regarder BD et BK comme deux plans inclinés, dont BQ et BP sont les hauteurs.

$$\text{Supposons}\begin{cases} BD \ldots\ldots\ldots\ldots = E, \\ BQ \ldots\ldots\ldots\ldots = H, \\ BK \ldots\ldots\ldots\ldots = e, \\ BP \ldots\ldots\ldots\ldots = h. \end{cases}$$

On aura, $EE : ee :: H : h$, ou $eeH = EEh$. Divisant les deux membres de la formule (M) par ces quantités égales, on aura, $TT = tt$, et $T = t$. Ainsi les temps employés à parcourir les cordes BD, BK, sont égaux entre eux.

On prouveroit de même que le temps employé à parcourir la corde quelconque NR, menée de l'extrémité inférieure

du diametre BR, est égal au temps employé à parcourir tout autre corde BD ou BK. Ainsi on doit conclure que toutes les cordes d'un cercle vertical, tirées des extrémités d'un diametre vertical, sont parcourues en temps égaux. Je n'ai pas besoin d'ajouter que le diametre vertical est compté lui-même au nombre des cordes qui partent de ses extrémités.

Remarque.

337. La même propriété du cercle peut se démontrer par le principe suivant, qui sert en général de base à la détermination des mouvements *synchrones*, c'est-à-dire des mouvements qui se font en temps égaux.

Ce principe est que, *si les forces motrices absolues de deux corps sont comme les produits des masses par les espaces parcourus, les temps des mouvements sont égaux.*

Dans les mouvements uniformes, cette proposition se démontre par la formule (C) de l'article 299; et, dans les mouvements uniformément accélérés, elle se démontre par la formule (C) de l'article 312. Elle est d'ailleurs évidente par elle-même; car supposons, par exemple, l'une des masses $= 1$, l'espace qu'elle parcourt $= 3$, la seconde masse $= 4$, l'espace qu'elle parcourt $= 6$: il est clair que les forces étant représentées par les produits 1×3 et 4×6, les espaces seront parcourus en temps égaux. Car nous pouvons regarder la seconde masse comme décomposée en quatre masses, dont chacune vaut 1, et la force qui lui est appliquée, comme décomposée en quatre forces, dont chacune doit faire parcourir à la masse un espace 6. Or, en comparant cette force avec celle qui fait parcourir à la masse 1 l'espace 3, on voit que les temps des mouvements doivent être égaux, puisque les deux forces dont il s'agit sont proportionnelles aux espaces qu'elles doivent faire parcourir à la même masse, et que, si l'un des espaces est double de l'autre, aussi la force qui le fait parcourir est double de l'autre force.

Cela posé, soit un corps M, qui parcourt la corde BD, tandis qu'un autre corps m parcourt la corde BK; et nommons p et π leurs pesanteurs absolues, F et f leurs pesanteurs relatives. En considérant les deux cordes BD, BK, comme partagées en un même nombre infini d'éléments, et les temps des mouvements comme partagés en un même nombre infini d'instants correspondants chacun à chacun des éléments des espaces BD, BK; on aura sans cesse, pendant les durées des deux mouvements, ... $F = p \times \frac{BQ}{BD} = p \times \frac{BD}{BR}$, $f = \pi \times \frac{BP}{BK} = \pi \times \frac{BK}{BR}$, et par conséquent $F : f :: p \times \frac{BD}{BR} : \pi \times \frac{BK}{BR} :: p \times BD : \pi \times BK$. Or, (323) $p : \pi :: M : m$. Donc, $F : f :: M \times BD : m \times BK$. Ainsi deux éléments correspondants des cordes BD, BK, seront parcourus en temps égaux; et par conséquent les cordes entieres seront elles-mêmes parcourues en temps égaux.

Il en sera de même pour toutes les autres cordes tirées des extrémités du diametre vertical BR.

Exemple III.

338. Trouver *le rapport des temps employés à parcourir les cordes* BD, BK, *menées du sommet d'une parabole* (Fig. 146), *dont l'axe* BQ *est vertical.*

Prolongez l'axe QB de la quantité BA, égale au parametre de la parabole; et menez les ordonnées DQ, KP. En nommant,

AB . . . . a,
BD . . . . E,
BQ . . . . H,
BK . . . . e,
BP . . . . h;

les propriétés de la parabole et les triangles rectangles BQD, BPK, donneront, $(DQ)^2 = a \times H$, $(KP)^2 = a \times h$,

$EE = HH + aH$, $ee = hh + ah$. Donc, $EE:ee::HH + aH : hh + ah$. Or, par la formule (M), on a, $EE : ee :: HTT:htt$. Donc, $HTT:htt::HH + aH:hh + ah$; ce qui donne (en divisant les antécédents par H, et les conséquents par h), $TT:tt::H+a:h+a$; et par conséquent $T:t:: \sqrt{[H+a]}:\sqrt{[h+a]}::\sqrt{AQ}:\sqrt{AP}$. Ainsi les temps employés à parcourir les cordes d'une parabole, menées du sommet de l'axe, qu'on suppose vertical, sont entre eux comme les racines quarrées des sommes des abscisses et du parametre.

Remarque.

339. La même chose peut se démontrer par le moyen de l'article 336 ou 337.

Soient toujours AB le parametre de la parabole; DQ, KP, es ordonnées menées des extrémités des cordes BD, BK. Par le sommet B, menez l'horizontale BM; ensuite sur AQ, AP, comme diametres, décrivez les demi-cercles AMQ, AOP, qui rencontrent BM aux points M et O. Tirez les droites MD, OK. Il est clair qu'on aura, $MB = DQ$, $OB = KP$; car $(MB)^2 = AB \times BQ$, $(OB)^2 = AB \times BP$, valeurs qui sont les mêmes que donne la propriété de la parabole, pour $(DQ)^2$, $(KP)^2$. Ainsi les deux quadrilateres BQDM, BPKO, sont des rectangles. Si, dans ces rectangles, on tire les diagonales MQ, OP; il est évident que ces diagonales seront parcourues dans les mêmes temps que les diagonales BD, BK, puisqu'elles leur sont égales, et qu'elles sont également inclinées à l'horizon. Or le temps employé à parcourir MQ est égal au temps employé à parcourir le diametre AQ, et le temps employé à parcourir OP est égal au temps employé à parcourir AP. Donc (en désignant les temps par la lettre initiale T, mise au-devant des espaces parcourus), on aura, $T.BD : T.BK :: T.AQ : T.AP$. Or (323, form. I), $T.AQ : T.AP :: \sqrt{AQ} : \sqrt{AP}$. Donc $T.BD : T.BK :: \sqrt{AQ} : \sqrt{AP}$.

Je ne pousserai pas plus loin le détail de ces applications. Finissons par expliquer la maniere de comparer en général

CHAPITRE V.

Du Mouvement des centres de gravité.

341. Lorsque plusieurs corps qui composent un même systême se meuvent : ou le centre de gravité de tout le systême se meut, ou il demeure en repos. L'état de ce point a plusieurs propriétés qui méritent par elles-mêmes d'être examinées, et qui s'appliquent d'ailleurs à des problêmes utiles.

SECTION I.

Propriétés générales du Mouvement des centres de gravité.

342. Rappelons-nous d'abord ici que le centre de gravité du système de deux poids, ou de deux corps soumis à l'action de leurs pesanteurs, qu'on peut regarder comme des forces paralleles, est placé (50, 89, 90) sur la droite qui joint leurs centres de gravité particuliers à des distances de ces points, qui sont réciproquement proportionnelles aux poids ou aux masses des corps dont il s'agit.

En partant de ce principe, on détermine le centre de gravité du systême d'un nombre quelconque de corps, comme on a déterminé (50) la position du centre d'un nombre quelconque de forces paralleles.

343. On dit que deux corps M et N (Fig. 150) décrivent

semblablement les droites MQ, NS, lorsque ces lignes et leurs parties correspondantes sont parcourues en temps proportionnels; c'est-à-dire, si l'on a MQ : NS : : MP : NR : : PQ : RS, et que les temps employés à parcourir les lignes entieres MQ, NS, soient entre eux comme les temps employés à parcourir les parties correspondantes MP et NR, ou PQ et RS des deux mêmes lignes.

Par où l'on voit que si les temps employés à parcourir les lignes entieres MQ et NS sont égaux, les temps employés à parcourir leurs parties correspondantes MP et NR, PQ et RS, seront aussi égaux.

Il est clair que tous les mouvements uniformes sont semblables; car, en désignant les temps employés à parcourir une ligne par la lettre initiale T mise au-devant de cette ligne, on a, dans ces mouvements, MQ : MP : : T.MQ : T.MP; et NS : NR : : T.NS : T.NR. Donc, si on a, MQ : MP : : NS : NR, on aura, T.MQ : T.MP : : T.NS : T.NR. D'où il suit que les droites entieres MQ, NS, et leurs parties homologues MP, NR, seront parcourues de la même maniere. Mais, dans ce qui suit, nous envisageons les mouvements semblables sous un point de vue plus général; ces mouvements peuvent être uniformes ou variés suivant une loi quelconque, pourvu qu'ils soient astreints à la condition énoncée ci-dessus, laquelle est le caractere de leur similitude. Ensuite on fixera dans chaque cas particulier la signification des mots *semblablement* ou *mouvements semblables*, par rapport à l'espece particuliere de mouvements qu'on aura en vue.

J'avertis qu'en parlant des espaces parcourus par des corps, je supposerai, pour abréger le discours, ou que chaque corps est assez petit pour pouvoir être censé concentré en un seul et même point, qu'il est par conséquent permis de prendre pour son centre de gravité; ou que ces espaces sont réellement ceux que parcourent les centres de gravité des corps, quelle que soit la grandeur de ces corps.

PROPOSITION I. LEMME.

344. SI, *dans un quadrilatere quelconque* ABCD (Fig. 151 et 152), *dont les quatre côtés peuvent être situés ou non situés dans un même plan, on divise les côtés opposés, ou les deux diagonales et deux côtés opposés, de maniere que l'on ait les deux proportions quelconques,*

$$AF:FB::DH:HC,$$
$$AE:ED::BG:GC;$$

qu'ensuite on tire les droites FH, EG : *ces lignes se couperont en un point* O, *et on aura ces deux suites de proportionnelles,*

$$EO:OG::AF:FB::DH:HC,$$
$$FO:OH::AE:ED::BG:GC.$$

1°. Menez et prolongez indéfiniment les droites BD, FE, GH. Les deux droites BD, FE, sont situées dans le même plan ABD, et par conséquent elles se rencontreront en un point; de même les deux droites BD, GH, se rencontreront, comme étant situées dans le même plan CBD.

Par le point D, menez parallèlement à AB la droite DI, qui rencontre FE au point I; et parallèlement à BC la droite DL, qui rencontre GH au point L. Les triangles semblables AEF, DEI, donnent $AE:ED::AF:DI = \frac{AF \times ED}{AE}$. De même, à cause des triangles semblables CHG, DHL, on a, $DL = \frac{CG \times DH}{CH}$. Donc $DI:DL::\frac{AF \times ED}{AE}:\frac{CG \times DH}{CH}::\frac{AF \times CH}{DH}:\frac{CG \times AE}{ED}::FB:BG$, parcequ'en vertu de l'hypothese, $FB = \frac{AF \times CH}{DH}$, et $BG = \frac{CG \times AE}{ED}$. D'où l'on voit (Géom.) que les trois lignes BD, FI, GL, iront concourir en un même point K, et cela quand même les droites AD, BC, ne seroient pas dans un même plan. Donc les quatre lignes FK, GK, EG, FH, sont dans un même plan; et par

conséquent les deux lignes EG, FH, se coupent en quelque point O.

2°. Ayant tiré la droite indéfinie FGM, menez CM parallele à AB; et du point H tirez aux points I, M, les droites HI, HM, qui sont dans un même plan, lequel contient la droite CD et les paralleles CM, DI. Les triangles semblables CGM, BGF, l'hypothese et les triangles semblables DEI, AEF, donnent cette suite de rapports égaux, CM:BF::CG:GB::DE:AE::DI:AF. Ainsi CM:BF::DI:AF, ou *alternando* CM:DI::BF:AF::CH:HD. Donc les deux triangles CHM, DHI, sont semblables, puisque les angles C et D sont égaux, comme formés par des côtés paralleles chacun à chacun, et que ces angles sont compris entre côtés proportionnels. Donc les trois points M, H, I, sont placés sur une seule et même ligne droite.

Les triangles semblables CGM, BGF, l'hypothese et les triangles semblables DEI, AEF, donnent cette suite de rapports égaux, GM:GF::CG:GB::DE:AE::EI:EF. D'où il suit que les droites IM, EG, sont paralleles.

Maintenant, les paralleles EG, IM, les triangles semblables DHI, CHM, et l'hypothese donnent, EO:OG::IH:HM::DH:HC::AF:FB. Ainsi on aura, EO:OG::AF:FB::DH:HC.

3°. On aura, par des considérations semblables, FO:OH::FE:EI::AE:ED::BG:GC.

Proposition II. Théorème.

345. Si *deux corps* A *et* B (Fig. 153 et 154) *décrivent semblablement et en même temps les droites* AD, BC, *situées ou non situées dans un même plan, et que le centre de gravité de leur systéme se meuve ; ce centre aura un mouvement semblable à ceux des corps* A *et* B.

Ayant mené les droites AB, CD, divisez ces lignes aux points F, H, de maniere qu'on ait, B:A::AF:FB::DH:HC; le point F sera le centre de gravité du système des deux

corps au moment qu'ils commencent à parcourir les deux droites AD, BC, et le point H sera le centre de gravité du système au moment où ils acheveront de parcourir les mêmes lignes. Ainsi il faut démontrer qúe si l'on tire la droite FH, le centre de gravité du système sera continuellement sur cette ligne, et qu'il la décrira avec un mouvement semblable à ceux des corps A et B.

Divisez les droites AD, BC, aux points indéterminés E et G, de maniere qu'on ait AE:ED::BG:GC; et menez la droite EG. Les deux corps, ayant des mouvements semblables, arriveront en même temps aux deux points E et G. Or, à cause des deux proportions, AF:FB::DH:HC, et AE:ED::BG:GC, les droites FH, EG, se coupent au point O, et on a les deux suites de proportionnelles,

EO:OG::AF:FB::DH:HC::B:A;
FO:OH::AE:ED::BG:GC.

D'où il suit que le centre de gravité du système arrive en O, lorsque les corps arrivent en E et G, et que ce centre se meut d'un mouvement semblable à ceux des mêmes corps.

Corollaire I.

346. En regardant les deux corps A et B comme réunis au centre de gravité de leur système, et ne formant qu'un seul et même corps qui décrit la droite FH; si l'on combine ce corps avec un autre qui se meuve de la même maniere, on verra, par la démonstration précédente, que le centre de gravité du nouveau système se mouvra d'un mouvement semblable à ceux des corps dont ce système est composé. La même chose se démontrera, en allant de proche en proche, pour un système composé de quatre corps, de cinq corps, et en général d'un nombre quelconque de corps.

Ainsi on peut dire en général que si, dans un système composé d'un nombre quelconque de corps, tous les corps se meuvent semblablement et en même temps, le centre de gravité de tout le système se mouvra de la même maniere.

COROLLAIRE II.

347. Si les droites AD, BC, décrites par les deux corps A et B, sont dans un même plan, la droite FH, décrite par le centre de gravité de leur système, sera aussi dans ce même plan; et si l'on a un troisieme corps qui se meuve comme les deux premiers et dans le même plan qu'eux, le centre de gravité du système des trois corps se mouvra aussi semblablement, et dans le même plan; ainsi de suite, pour un système composé d'un nombre quelconque de corps qui se mouvroient tous semblablement, en même temps, et dans un même plan.

COROLLAIRE III.

348. Supposons que les droites AD, BC (Fig. 155 et 156), décrites par les deux corps proposés A et B, soient paralleles, et par conséquent dans un même plan. Les droites BA, CD, qui sont situées dans ce plan, étant prolongées s'il est nécessaire, se rencontreront en un point S; et, puisqu'on a, B:A::AF:FB::DH:HC, on aura *componendo*, AF:AF + FB, ou AB :: DH : DH + HC, ou DC; et *alternando*, AF : DH :: AB : DC. Or, à cause des paralleles AD, BC, on a, AB:DC::SA:SD::SB:SC. Donc AF:DH::SA:SD::SB:SC; et par conséquent les droites AD, BC, FH, sont paralleles.

Il en sera de même en général pour un nombre quelconque de corps. Si tous ces corps décrivent semblablement et en même temps des droites paralleles, qui peuvent d'ailleurs être ou n'être pas toutes dans un même plan, le centre de gravité de leur système décrira semblablement et en même temps une droite parallele aux chemins parcourus par tous les corps.

COROLLAIRE IV.

349. SOIENT deux corps A et B (Fig. 157 et 158) qui décrivent semblablement et en même temps les côtés homologues et paralleles chacun à chacun de deux polygones semblables ADEP, BCGM. Il est clair, par ce qui précede, que le centre de gravité F de leur système décrira semblablement et en même temps les côtés FH, HN, NO, d'un polygone, lesquels seront paralleles respectivement aux droites AD et BC, DE et CG, EP et GM. Or, puisque les deux polygones ADEP, BCGM, sont semblables, et qu'on a par conséquent AD:BC::DE:CG::EP:GM; il s'ensuit (Géom.) que toutes les lignes AB, DC, EG, PM, iront concourir en un même point S. Donc les trois polygones ADEP, BCGM, FHNO, sont composés d'un même nombre de triangles semblables SAD, SBC, SFH, etc. Donc ces trois polygones sont semblables. Ainsi le centre de gravité du système décrit le contour d'un polygone semblable à ceux que décrivent les corps A et B.

Qu'un troisieme corps I décrive le contour d'un polygone IRVT semblable à ceux dont on vient de parler; il est clair, toujours par les mêmes principes, que le centre de gravité du système des trois corps A, B, I, décrira le contour d'un polygone semblable aux précédents; ainsi de suite pour un nombre quelconque de corps.

COROLLAIRE V.

350. SI l'on imagine que les côtés des polygones de l'article précédent deviennent infiniment petits, mais que leur nombre augmente à l'infini; alors tous ces polygones deviendront des courbes semblables, dont les parties infiniment petites et correspondantes seront paralleles chacune à chacune. Ainsi, lorsque plusieurs corps parcourent semblablement et en même temps les contours de courbes sem-

blables et composées d'éléments correspondants, paralleles chacun à chacun, le centre de gravité du systême décrit de la même maniere une courbe semblable aux précédentes, et qui leur est parallele élément à élément.

REMARQUE.

351. On a fait attention sans doute, dans l'énoncé du théorême de l'article 345, à ces paroles : *et que le centre de gravité de leur systême se meuve.* Cette restriction a été mise, parcequ'il peut se faire que le centre de gravité demeure immobile.

En effet, supposons deux corps A et B (Fig. 159) qui décrivent semblablement, en même temps et en sens contraires, les droites paralleles AD, BC, qui leur soient réciproquement proportionnelles, en sorte qu'on ait, A:B::BC:AD; le centre de gravité demeurera en repos. Car, si l'on tire les droites AB, CD, qui se coupent en F, et que par le point F on mene la droite EFK, qui rencontre AD et BC aux points E et K, on aura cette suite de proportionnelles, A : B : : BC : AD : : BF : AF : : CF : DF : : BK : AE : : KC : ED. D'où il suit que le point F est le centre de gravité du systême au commencement et à la fin du mouvement, et lorsque les deux corps sont arrivés aux points correspondants E et K de leurs chemins. Donc le centre de gravité ne change pas de place.

En regardant maintenant le corps A comme le systême de plusieurs corps qui vont dans un sens, et le corps B comme le systême de plusieurs corps qui vont dans le sens opposé, nous pouvons conclure en général que si un systéme est composé d'un nombre quelconque de corps qui vont en partie dans un sens, en partie dans le sens opposé, et que les centres de gravité des deux parties du systême décrivent semblablement et en même temps des droites paralleles, réciproquement proportionnelles aux sommes de

corps qui composent ces deux parties, le centre de gravité du système général demeurera en repos.

Il résulte donc, de tout ce qui précede, que lorsque plusieurs corps se meuvent semblablement, et en même temps, ou le centre de gravité de leur système se meut, et alors il se meut de la même maniere que tous les corps, ou bien il demeure en repos.

PROPOSITION III. THÉORÊME.

352. SI *deux corps* A *et* B (Fig. 155 et 156) *décrivent semblablement et en même temps les droites paralleles* AD, BC, *et qu'en conséquence le centre de gravité de leur système décrive* FH : *on aura,*

$$(B+A)\times FH = B\times BC + A\times AD \text{ (Fig. 155)},$$
$$(B+A)\times FH = B\times BC - A\times AD \text{ (Fig. 156)}.$$

C'est-à-dire que le produit de la somme des deux corps, par le chemin que décrit leur centre de gravité, est égal à la somme ou à la différence des produits des deux corps multipliés chacun par le chemin qu'il décrit, selon que les deux corps vont dans le même sens ou en sens contraires.

Les trois droites BC, AD, FH, sont paralleles (348); et, en menant les droites BFA, CHD, qui se rencontrent en S; on a cette suite de proportionnelles, $FH : BC : AD :: SF : SB : SA$; ou bien, (en multipliant antécédents et conséquents par les trois quantités $(B+A)$, B, A), $(B+A)\times FH : B\times BC : A\times AD :: (B+A)\times SF : B\times SB : A\times SA$. Or, à cause de $SF = SB - FB$, et de $SF = FA \pm SA$, on aura, $B\times SF = B\times SB - B\times FB$, et $A\times SF = A\times FA \pm A\times AS$. Ajoutant ensemble ces deux équations, on aura, $(B+A)\times SF = B\times SB - B\times FB + A\times FA \pm A\times AS$. Or, puisque le point F est le centre de gravité du système des deux corps, lorsqu'ils sont en A et B, on a, $B : A :: FA : FB$, et par conséquent $B\times FB = A\times FA$. Donc la derniere équation se réduit à $(B+A)\times SF =$

$B \times SB \pm A \times SA$. Donc on aura aussi, $(B + A) \times FH = B \times BC \pm A \times AD$.

On remarquera, au sujet de l'équation $(B + A) \times FH = B \times BC - A \times AD$, relative à la Figure 156, que si le centre de gravité F au premier instant tomboit au-dessus du point S, au lieu de tomber au-dessous, et que par conséquent ce centre, au lieu d'aller de droite à gauche, alloit de gauche à droite, on auroit, $(A + B) \times HF = A \times AD - B \times BC$.

COROLLAIRE. I.

353. Qu'on ait un nombre quelconque de corps qui décrivent semblablement et en même temps des lignes paralleles : le centre de gravité du systême décrira aussi semblablement et en même temps une ligne parallele. Cela posé, si tous les corps vont dans le même sens, la somme de tous ces corps, multipliée par le chemin que décrit le centre de gravité de leur systême, sera égale à la somme des produits de tous les corps multipliés chacun par le chemin qu'il décrit; et si les corps vont en partie dans un sens, en partie dans le sens contraire, la somme de tous les corps, multipliée par le chemin que décrit le centre de gravité du systême, sera égale à la différence qu'il y aura entre la somme des produits des corps qui vont d'un côté, multipliés chacun par le chemin qu'il décrit; et la somme des produits des corps qui vont dans le sens opposé, multipliés aussi chacun par le chemin qu'il décrit.

Tout cela est évident, en réduisant d'abord deux corps à un corps unique réuni au centre de gravité de leur systême; puis combinant ce corps avec un troisieme, et réduisant de même ces deux corps, où les trois premiers corps du systême total à un corps unique, que l'on combinera avec un quatrieme corps; ainsi de suite.

COROLLAIRE II.

354. SUPPOSONS que les mouvements semblables dont il est question (410) soient uniformes. Alors les droites AD, BC, FH, décrites uniformément et en temps égaux par les corps A, B, et leur centre de gravité, exprimeront (13) leurs vitesses ; et les produits $A \times AD$, $B \times BC$, $(B+A) \times FH$, exprimeront (296) leurs quantités de mouvement. Donc, puisqu'on a, $(B+A) \times FH = B \times BC \pm A \times AD$, et $FH = \frac{B \times BC \pm A \times AD}{B+A}$; on peut dire que *la quantité de mouvement du systéme de deux corps qui décrivent uniformément et en temps égaux des lignes paralleles, est égale à la somme ou à la différence des quantités particulieres de mouvements des deux mobiles ;* et que *la vitesse du centre de gravité du systéme est égale à la somme ou à la différence des quantités de mouvements des deux mobiles, divisée par la somme de ces mobiles.*

La même chose a lieu pour un nombre quelconque de corps.

COROLLAIRE III.

355. LORSQUE plusieurs corps décrivent semblablement et en même temps les côtés homologues et paralleles de polygones semblables, et que par conséquent le centre de gravité de leur systéme décrit aussi semblablement et en même temps les côtés homologues et paralleles d'un polygone, qui sera semblable aux précédents, la somme de tous les corps, multipliée par le contour du polygone que décrit le centre de gravité du systéme, sera égale à la somme des produits de tous les corps multipliés chacun par le contour du polygone qu'il décrit, ou à la différence qu'il y aura entre la somme des produits des corps qui vont d'un côté, multipliés chacun par le chemin qu'il décrit, et la somme des produits des corps qui vont du côté opposé, multipliés aussi chacun par le chemin qu'il décrit.

Cela se démontre en ajoutant ensemble successivement toutes les équations que donnent (353) les côtés homologues des polygones.

Si ces polygones sont décrits uniformément et en même temps, le contour de chacun d'eux pourra représenter la vîtesse du corps qui le décrit; et on appliquera ici le résultat de l'article précédent.

COROLLAIRE IV.

356. LORSQUE les polygones dont on vient de parler ont une infinité de côtés infiniment petits, et deviennent par conséquent des courbes semblables; l'article précédent a également lieu dans toute son étendue, et il ne faut qu'y substituer le mot *courbe* au mot *polygone*.

COROLLAIRE V.

357. PARMI les applications qu'on peut faire de la théorie précédente à la pratique, en voici une qui a pour objet la détermination de la *portée moyenne* des terres dans les déblais et les remblais.

Soit (Fig. 160) un creux DEF qui doive être rempli au moyen de la terre provenant de l'éminence ABC; en sorte que AF représentant la ligne de niveau, les deux espaces DEF, ABC, soient égaux. Supposons que les terrassiers, qui viennent prendre dans leurs brouettes la terre au pied de l'éminence pour la porter et la verser dans la cavité qu'il faut remplir, marchent suivant des lignes de niveau, ou paralleles à la droite AF. Je cherche les centres de gravité G et K de l'éminence et du creux, et je mene les verticales GH, KI. Alors la partie HI de l'horizontale, comprise entre les deux verticales, représente la *portée moyenne* des terres.

Car, si on décompose l'éminence et le creux en un même nombre de parties correspondantes chacune à chacune, en

sorte que chaque partie de l'éminence doive venir occuper une partie du creux, la somme des produits des parties de terre, multipliées chacune par le chemin qu'elle décrit, sera égale au produit de l'éminence entiere par le chemin que décrit son centre de gravité. Or, puisque toutes les parties de terre sont transportées suivant des lignes paralleles à HI, et que les centres de gravité de l'éminence et du creux répondent verticalement aux points H et I; il est clair que HI représente l'espace parcouru par le centre de gravité de l'éminence. Donc cette même ligne HI exprime la portée moyenne des terres, c'est-à-dire une portée qui est telle, que si toute la masse de l'éminence étant réunie au point H, il falloit la transporter au point I.

Si les terrassiers ne marchoient pas en lignes droites, mais qu'ils décrivissent, toujours horizontalement, les côtés homologues et paralleles de polygones semblables ou de courbes semblables, on détermineroit le polygone *moyen* ou la courbe *moyenne* décrite par le centre de gravité de toute la masse à transporter, en traçant du point H au point I un polygone ou une courbe semblable à chacun des chemins que parcourent les terrassiers.

On trouveroit encore par les mêmes principes la portée moyenne des terres, s'il falloit combler plusieurs creux, au moyen d'une éminence ou de plusieurs éminences.

SECTION II.

Usage des Mouvements des centres de gravité pour la mesure de l'étendue.

358. Il y a des surfaces ou des solides, que l'on peut considérer comme engendrés par le mouvement d'une ligne ou d'un plan. Alors ces étendues peuvent être déterminées par

la théorie du mouvement des centres de gravité; et ce moyen est quelquefois plus simple et plus commode que ceux où l'on emploieroit seulement la géométrie pure; c'est de quoi le toisé des voûtes offre plusieurs exemples. Il est donc à propos d'expliquer ici l'usage du mouvement des centres de gravité pour la mesure de l'étendue. Commençons par une observation préliminaire et essentielle.

359. Une ligne ou une surface qui se meut parallèlement à elle-même, soit de toute autre maniere, pourvu que ce ne soit pas dans le sens de sa longueur ou de son plan, engendre une surface ou un solide; mais l'étendue superficielle ou solide, ainsi engendrée, ne doit être attribuée à tout le mouvement de la ligne ou de la surface génératrice que dans le cas où les parties de cette ligne ou de cette surface sont perpendiculaires chacune à chacun des chemins qu'elles parcourent. En effet, soit la droite AB (Fig. 161) qui, en se mouvant parallèlement à elle-même le long de la directrice inclinée AD, engendre le parallélogramme ABCD. On se tromperoit si l'on regardoit l'aire de ce parallélogramme comme le produit de la droite génératrice AB par sa vîtesse, c'est-à-dire par la droite AD, qui peut représenter le chemin que parcourt chacun des points de AB. Ainsi il faut décomposer la vîtesse AD en deux autres AH, AE, l'une parallele, l'autre perpendiculaire à AB. Alors il est clair qu'en vertu de la vîtesse AH, la droite AB n'engendre pas de surface, puisqu'elle ne fait par-là que s'alonger dans le sens AB; mais que la surface engendrée l'est seulement en vertu de la vîtesse AE, puisqu'en effet l'aire du parallélogramme ABCD est égale à celle du rectangle ABFE. On raisonnera de même pour toutes les autres especes d'étendues produites par le mouvement. De là résulte le théorême suivant, que le P. Guldin, jésuite, donna, en 1635, dans son livre *de Centro Gravitatis*.

PROPOSITION. THÉORÊME.

360. L'ÉTENDUE *superficielle ou solide, engendrée par le mouvement d'une ligne ou d'un plan, dont les éléments sont perpendiculaires, à chaque instant, aux espaces qu'ils parcourent dans le même sens, est égale au produit de cette ligne ou de ce plan, par le chemin que décrit son centre de gravité.*

En effet, chaque élément de la ligne génératrice, ou du plan générateur décrit une petite surface, ou un petit solide, qui a pour valeur le produit de cet élément, par le chemin que décrit l'un de ses points, ou par le chemin que décrit son centre de gravité, puisque tous les points d'un même élément peuvent être censés décrire des chemins égaux ; et la somme de toutes ces petites surfaces, ou de tous ces petits solides, n'est autre chose que la surface totale, ou le solide total. Or, si l'on regarde les éléments générateurs comme des petits corps, on voit, par ce qui précede, que la somme de leurs produits par les chemins que décrivent leurs centres de gravité, est égale au produit de la ligne totale, ou de la surface totale, multipliée par le chemin que décrit son centre de gravité. Donc, etc.

Voici quelques applications de ce théorême.

EXEMPLE I.

361. TROUVER *la surface d'un triangle* ABC (Fig. 162).

Du sommet C soit abaissée sur la base AB la perpendiculaire CD. Imaginons que la base AD du triangle rectangle partiel ADC soit divisée en une infinité de petites lignes élémentaires égales Am, mn, np, etc., détachées les unes des autres, qui se meuvent parallèlement à DC, avec des vîtesses inégales, de maniere que leurs centres de gravité arrivent en même temps sur la droite AC. Il est clair que le milieu ou centre de gravité H de AD parcourra une droite HK égale

à la moitié de la hauteur DC, puisque les triangles semblables AHK, ADC, donnent, AH : AD : : HK : DC. Or l'aire du triangle ADC étant la somme des surfaces engendrées par les éléments A*m*, *mn*, *np*, etc., et cette somme étant égale au produit de la ligne génératrice entiere AD par le chemin que décrit son centre de gravité ; il s'ensuit que l'aire $ADC = AD \times HK = \frac{AD \times DC}{2}$, qui est la moitié du produit de la base par la hauteur. On démontrera de même que la surface du second triangle rectangle partiel BDC est la moitié du produit de sa base et de sa hauteur. Ainsi le triangle proposé ABC est également la moitié du produit de sa base par sa hauteur ; résultat conforme à ce qu'on sait déja par la géométrie.

EXEMPLE II.

362. TROUVER *la solidité d'une pyramide* SABCDE (Fig. 163).

Soit abaissée du sommet S la perpendiculaire SO sur la base. Par cette ligne SO, et par les arêtes SA, SB, SC, etc., de la pyramide, soient menés les plans SOA, SOB, SOC, etc., qui partagent la pyramide proposée en pyramides triangulaires SOAB, SOBC, etc. Considérons l'une SOAB de ces dernieres pyramides. Ayant mené par la droite SO et par le point F, milieu de AB, le plan SOF, qui coupe le plan OAB suivant OF, prenons sur cette ligne OF le point K, tel que l'on ait $OK = \frac{2}{3}$ OF, pour avoir (105) le centre de gravité du triangle OAB ; ensuite menons parallèlement à OS la droite KH, qui rencontre SF en H. Cela posé, imaginons que la base OAB de la pyramide triangulaire SOAB soit partagée en une infinité de petites surfaces qui se meuvent parallèlement à OS, de maniere que leurs centres de gravité arrivent en même temps sur la face triangulaire SAB. Ces petites surfaces engendreront le solide de la pyramide SOAB ; et, comme le centre de gravité K de la

base OAB décrit la droite KH, qui est évidemment le tiers de OS, à cause des triangles semblables FKH, FOS, il s'ensuit que la pyramide SOAB, qui est égale à OAB × KH, aura pour expression $\frac{OAB \times OS}{3}$, c'est-à-dire le tiers du produit de sa base par sa hauteur. La même chose ayant lieu pour les autres pyramides triangulaires qui composent la pyramide proposée, nous conclurons que cette pyramide est le tiers du produit de sa base par sa hauteur ; ce qu'on sait encore par la géométrie.

EXEMPLE III.

363. TROUVER *le solide d'une demi-sphere, ou d'un dôme en plein cintre produit par la révolution du quart-de-cercle* ABMC (Fig. 164) *autour de son rayon* AC.

Si l'on imagine que l'aire génératrice ABMC soit partagée en une infinité de petites surfaces, il est clair que, chacune de ces surfaces élémentaires décrivant une circonférence de cercle, qui lui est continuellement perpendiculaire, le solide cherché sera égal au produit de l'aire ABMC par la circonférence que décrit son centre de gravité. Or le centre de gravité F du quart-de-cercle ABMC est placé (111) sur le rayon AM, qui le divise en deux parties égales ; de maniere que, tirant la corde BC, on a, $AF = \frac{2BC \times AM}{3BMC} = \frac{4CN \times AC}{3BMC}$; et par conséquent si l'on mene FH perpendiculaire à AC, on aura, $HF = \frac{4(CN)^2}{3BMC}$, à cause des triangles semblables ANC, AHF, qui donnent, AC : CN :: AF : FH. Donc le solide cherché, qui est égal à ABMC × *circ.* FH, aura pour expression $ABMC \times \pi \times \frac{4(CN)^2}{3BMC}$, en nommant π le rapport de la circonférence au rayon. Mais l'aire du secteur $ABMC = \frac{BMC \times AC}{2}$; et le triangle rectangle isocele ANC donne, $4(CN)^2 = 2(AC)^2$. Ainsi l'expression précédente devient

$\frac{\pi}{2} \times AC \times \frac{2(AC)^2}{3}$, ou $\left(\frac{\pi}{2} \times (AB)^2\right) \times \frac{2}{3} AC$, c'est-à-dire le produit de la base du dôme par les deux tiers de sa hauteur, comme on l'a trouvé dans la géométrie.

EXEMPLE IV.

364. TROUVER *la solidité d'un dôme surbaissé ou surmonté, produit par la révolution du quart d'ellipse* ABD (Fig. 165) *autour de son demi petit axe* AD, *ou de son demi grand axe* AB.

Du point A comme centre, avec le rayon AB, soit décrit le quart-de cercle ABC correspondant au quart d'ellipse proposé. En menant au demi-axe AB commun au quart d'ellipse et au quart-de-cercle les ordonnées correspondantes PN, PM, on aura (*Ap. de l'Alg. à la Géom.* 100), PN:PM::AD:AB; c'est-à-dire que chaque ordonnée du quart d'ellipse est à l'ordonnée correspondante du quart-de-cercle, dans le rapport constant du demi-axe non commun AD au demi-axe commun AB. Donc la somme de toutes les PN, ou l'aire entiere ABD, est à la somme de toutes les PM, ou à l'aire entiere ABC, dans le même rapport; ou ABD:ABC::AD:AB.

Les centres de gravité des ordonnées PN, PM, sont placés à leurs milieux x et z; et si par ces points on mene à AD les perpendiculaires xy, zt, les produits PN $\times xy$, PM $\times zt$, qui représentent les moments des droites PN, PM, par rapport à AD, seront entre eux dans le rapport de PN à PM, ou de AD à AB, parceque $xy = zt$. Donc la somme de tous les produits PN $\times xy$, ou le moment du quart d'ellipse ABD, par rapport à AD, est à la somme de tous les produits PM $\times zt$, ou au moment du quart-de-cercle ABC, par rapport à la même droite AD, comme AD est à AB. Divisant cette proportion, terme à terme, par la proportion ABD:ABC::AD:AB, et désignant la somme des PN $\times xy$ par $\int$.PN $\times xy$, et la somme des PM $\times zt$ par $\int$.PM $\times zt$;

on aura, $\frac{\int .PN \times xy}{ABD} : \frac{\int .PM \times zt}{ABC} :: 1 : 1$, et par conséquent $\frac{\int .PN \times xy}{ABD} = \frac{\int .PM \times zt}{ABC}$. Or (96), la premiere fraction est la distance KL du centre de gravité K du quart d'ellipse ABD à la droite AD, et la seconde est la distance FH du centre de gravité F du quart-de-cercle ABC à la même ligne. Donc, puisque ces deux distances sont égales, les deux centres de gravité K et F sont placés sur une même droite FKG perpendiculaire à AB.

Maintenant, le quart d'ellipse ABD, en tournant autour de AD, engendre un solide qui a pour expression, ABD × *circ.* KL, ou bien ABD × *circ.* FH. Substituons pour ABD sa valeur ABC × $\frac{AD}{AB}$, ou $\frac{BMC \times AB}{2} \times \frac{AD}{AB}$, ou $\frac{BMC \times AD}{2}$, et pour *circ.* FH sa valeur $\frac{\pi \times 2(AB)^2}{3BMC}$ (363), l'expression de notre solide deviendra, $\frac{AD}{2} \times \frac{\pi \times 2(AB)^2}{3}$, ou bien $\left(\frac{\pi}{2} \times (AB)^2\right) \times \frac{2}{3} AD$. D'où l'on voit que la solidité du dôme surbaissé, produit par la révolution du quart d'ellipse ABD autour de son demi-axe AD, est égale au produit du cercle qui lui sert de base par les deux tiers de sa montée.

On trouvera un résultat semblable pour la solidité du dôme surmonté.

Fin du Livre premier de la seconde Partie.

LIVRE SECOND.

DE LA COMMUNICATION DES MOUVEMENTS.

365. Si plusieurs corps agissent les uns sur les autres, soit en se frappant, soit en se tirant ou se poussant, par des fils, des leviers interposés, soit de toute autre maniere qu'on voudra imaginer, ils ne prennent pas, dans un instant proposé, les mêmes mouvements qu'ils prendroient si, au commencement de cet instant, chacun d'eux devenoit libre, et n'éprouvoit aucune réaction de la part des autres. Car chaque corps, en vertu de son inertie particuliere, tend à conserver en ligne droite le mouvement qu'il a reçu; et, comme ce mouvement est contrarié par ceux des autres corps, tous ces mouvements doivent se troubler et s'altérer réciproquement les uns et les autres, tant pour les quantités que pour les directions. Les mouvements perdus par certains corps sont gagnés par les autres, ou en totalité si le système est d'ailleurs parfaitement libre, et n'éprouve la résistance d'aucun obstacle étranger et fixe, ou seulement en partie s'il se trouve dans le système de tels obstacles; car ces obstacles, lorsqu'ils ont lieu, influent sur les quantités et les directions des mouvements. Mais, dans tous les cas, on aura le vrai mouvement de chaque corps, pour un instant donné, en déterminant convenablement, pour cet instant, les conditions de l'équilibre entre les mouvements perdus et les mouvements gagnés : c'est ce que nous allons faire voir dans les chapitres suivants, par la solution d'un certain nombre de problêmes choisis, qui se rapportent aux différentes manieres dont les corps peuvent agir réciproquement les uns sur les autres.

366. Nous avons vu (296) que la force d'un corps en mouvement, ou la quantité de mouvement qui est l'effet de cette force, s'estime en général par le produit de la masse et de la vîtesse du mobile. Ainsi la quantité de mouvement perdu par un corps, ou la mesure de la force capable d'opérer cette perte, est le produit de la masse du mobile par la vîtesse perdue ; car on doit mesurer de la même maniere les forces qui détruisent le mouvement et celles qui le produisent, puisqu'il faut évidemment employer autant de force pour détruire un certain mouvement qu'il en a fallu employer pour le produire. De même, la quantité de mouvement gagné par un corps, ou la mesure de la force qui opere ce gain, est le produit de la masse du corps par la vîtesse gagnée.

CHAPITRE PREMIER.

Du Choc des Corps.

367. On distingue en général trois especes de corps, les corps *durs*, les corps *élastiques*, et les corps *mous.*

Un corps est dur, et sa dureté est parfaite, lorsqu'il est d'une roideur inflexible, et qu'il ne s'applatit aucunement par la compression.

Un corps est élastique, et son élasticité est parfaite, lorsqu'il s'applatit par la compression, et qu'il reprend ensuite sa premiere figure lorsque cette compression vient à cesser.

Un corps est mou, et sa mollesse est parfaite, lorsqu'il s'applatit par la compression, et qu'il reste, lorsqu'elle cesse, dans l'état auquel elle l'a réduit.

Il n'existe ni dureté, ni élasticité, ni mollesse parfaites ;

SECTION I.

Du Choc direct des Corps.

PROPOSITION I. PROBLÈME.

369. LE *corps dur* A (Fig. 166) *allant choquer le corps dur* B, *qui fuit directement devant lui avec une moindre vîtesse, trouver la vîtesse des deux corps après le choc.*

1°. La matière étant impénétrable, il est clair que, lorsque le corps A aura atteint le corps B placé sur sa route, il agira sur lui et le poussera jusqu'à ce qu'ils aient tous deux la même vîtesse. Alors cette action, qui s'exerce dans un temps très court, cessera entièrement; et les deux corps continueront à marcher de compagnie avec la même vîtesse, comme s'ils ne composoient qu'une seule et même masse, puisqu'il n'y a point de ressort qui puisse les obliger à se séparer.

2°. En vertu de leurs inerties particulieres, les deux corps A et B résistent au changement que le choc tend à produire dans leurs états respectifs; et cette résistance est telle que la quantité de mouvement perdu par le corps choquant A est nécessairement égale à la quantité de mouvement gagnée par le corps choqué B. Or, si l'on nomme V la vîtesse de A avant le choc, u la vîtesse de B aussi avant le choc, x la vîtesse commune des deux corps après le choc, il est visible qu'en vertu du choc la vîtesse perdue par A est $V-x$, et la vîtesse gagnée par B est $x-u$. Ainsi on aura l'équation $A(V-x)=B(x-u)$; d'où l'on tire $x=\frac{AV+Bu}{A+B}$. *La vîtesse commune des deux corps après*

le choc est donc égale à la somme des quantités de mouvements avant le choc, divisée par la somme des corps.

COROLLAIRE I.

370. En mettant pour x sa valeur dans l'expression $V - x$ de la vîtesse perdue par le corps A, et dans celle $x - u$ de la vîtesse gagnée par le corps B, on trouvera, $V - x = \frac{B(V-u)}{A+B}$, et $x - u = \frac{A(V-u)}{A+B}$. Par où l'on voit que *la vîtesse perdue par le corps choquant est égale au produit du corps choqué par la différence des vîtesses avant le choc, divisé par la somme des corps;* et que *la vîtesse gagnée par le corps choqué est égale au produit du corps choquant par la différence des vîtesses avant le choc, divisé par la somme des corps.*

Les valeurs générales des vîtesses x, $V - x$, $x - u$, sont susceptibles d'une infinité d'applications particulieres, selon les relations qui existeront entre les quantités A, B, V, u. Supposons, par exemple, que le corps B soit en repos au moment du choc, et que le corps A soit double du corps B: on fera, $u = 0$, $B = \frac{A}{2}$; et alors on trouvera, $x = \frac{2}{3}V$, $V - x = \frac{1}{3}V$, $x - u = \frac{2}{3}V$. Nos lecteurs s'exerceront d'eux-mêmes à d'autres applications.

COROLLAIRE II.

371. Avant le choc, la vîtesse du centre de gravité des deux corps A et B est $\frac{AV + Bu}{A+B}$, et la quantité de mouvement du système de ces corps est $AV + Bu$ (354). Or nous avons ici en général, $x = \frac{AV + Bu}{A+B}$ et $(A+B)x = AV + Bu$. Ainsi *la vîtesse du centre de gravité et la quantité de mouvement du systéme des deux corps sont les mêmes après le choc qu'avant le choc.*

PROPOSITION II. PROBLÈME.

372. SUPPOSONS *maintenant que les deux corps viennent à la rencontre l'un de l'autre* (Fig. 167), *on demande leur vîtesse après le choc.*

Il est clair que celui des deux corps A et B, qui a la plus grande force ou la plus grande quantité de mouvement (et que j'appelle *corps choquant*) obligera l'autre à rebrousser chemin, et qu'après le choc ils marcheront de compagnie avec la même vîtesse, comme s'ils ne faisoient qu'une seule et même masse. Soit A le corps choquant, B le corps choqué; et soient nommées V et u respectivement les vîtesses de A et B avant le choc. On pourroit déterminer la vîtesse commune des deux corps après le choc, en faisant, suivant l'algebre, u négative dans l'expression de x, qu'on a trouvée (369); mais voici la solution directe du problême.

La quantité de mouvement que perd le corps choquant A est toujours égale à la quantité de mouvement que le corps choqué B gagne dans le sens du mouvement du premier corps. Or, nommant x la vîtesse commune des deux corps après le choc, il est visible d'abord que $V - x$ est la vîtesse perdue par le corps A. D'un autre côté, $u + x$ est la vitesse gagnée par le corps B dans le sens de V; car, 1°. ce corps doit gagner dans le sens de V une vîtesse qui détruise la vîtesse contraire u, avec laquelle il vient à la rencontre de A. 2°. Il gagne encore dans le même sens la vîtesse x, avec laquelle il se meut après le choc. Ainsi, eu égard à tout, il gagne la vîtesse $(u + x)$. On aura donc l'équation $A(V - x) = B(u + x)$, laquelle donne, $x = \frac{AV - Bu}{A + B}$; d'où l'on voit que *la vîtesse commune des deux corps après le choc est égale à la différence des quantités de mouvements avant le choc, divisée par la somme des corps.*

COROLLAIRE I.

373. METTONS pour x sa valeur dans l'expression $V - x$

de la vitesse perdue par A, et dans celle $u + x$ de la vitesse gagnée par B dans le sens de V; nous trouverons,
$V - x = \frac{B(V+u)}{A+B}$, et $u + x = \frac{A(V+u)}{A+B}$.

On fera de ces formules les mêmes applications qu'on a indiquées (370) pour celles du premier cas.

Corollaire II.

374. Avant le choc, la vitesse du centre de gravité des deux corps dans le sens de A, est $\frac{AV - Bu}{A+B}$, et la quantité de mouvement du système dans le même sens est $AV - Bu$ (354). Or nous avons ici, $x = \frac{AV - Bu}{A+B}$, $(A+B)x = AV - Bu$. Donc *la vitesse du centre de gravité, et la quantité de mouvement du système sont les mêmes après le choc qu'avant le choc, dans le sens du corps choquant.*

Proposition III. Problème.

375. Un *corps élastique allant choquer un autre corps élastique, qui fuit devant lui, ou qui vient à le rencontrer, déterminer les vitesses des deux corps après le choc.*

Imaginons que les deux corps proposés A et B (Fig. 168) soient privés de leur élasticité, et que pour en tenir lieu on mette entre eux un ressort ACB, qui se comprime lorsque les corps se frappent, et qui se détend ensuite lorsque l'action d'un corps sur l'autre cesse tout-à-fait. Soit ACB l'état naturel de ce ressort, c'est-à-dire l'extension qu'il prend lorsqu'il est libre, et que rien ne le comprime; et supposons qu'en vertu de la percussion il se réduise à l'espace *aCb*. Si les deux corps sont parfaitement élastiques, ou que le ressort fictif interposé soit parfait, ce ressort reviendra à son premier état, lorsque la percussion cessera; et s'il n'est pas parfait, il prendra un autre état DCE. Je suppose, pour donner toute la généralité possible au problême, que le

ressort revienne à la situation indéterminée DCE. Dans le cas où le ressort reviendroit à son état primitif ACB, la force élastique seroit égale à la force qui a produit la percussion. Mais, dans le cas présent, la premiere force n'est qu'une certaine partie de la seconde. Soit en général $\frac{p}{1}$ le rapport de l'élasticité à la percussion. Le nombre p sera $=0$, lorsque les corps seront parfaitement durs ou mous; et p sera $=1$, lorsque les corps seront parfaitement élastiques. Toutes les valeurs de p sont donc comprises entre les limites o et 1.

Cela posé, j'observe qu'au moment où les corps s'atteignent, ils agissent l'un sur l'autre exactement de la même maniere que s'ils étoient parfaitement durs. Pendant qu'ils se pressent, le ressort se tend, et la percussion ne finit que lorsqu'ils ont tous deux la même vîtesse dans le même sens: alors l'élasticité entre en exercice, et produit un nouveau changement dans les vîtesses des deux corps. Ce double effet de la percussion et de l'élasticité s'opere dans un temps très court; mais, quelque court qu'il soit, on y peut distinguer deux parties, l'une relative à la percussion et pendant laquelle le ressort se comprime, l'autre relative à l'élasticité et pendant laquelle le ressort se détend.

Soit A le corps choquant, c'est-à-dire celui des deux corps qui a la plus grande vîtesse lorsqu'ils vont dans le même sens avant le choc, ou la plus grande quantité de mouvement lorsqu'ils vont en sens contraires; B le corps choqué; V, la vîtesse de A avant le choc dans le sens MN; u, la vîtesse de B dans le sens MN, ou dans le sens opposé NM. Il est clair qu'après le choc, la vîtesse de A dans le sens MN sera la vîtesse V moins la vîtesse perdue par ce corps, et que la vîtesse de B, aussi dans le sens MN, sera la vîtesse qu'il aura gagnée dans ce sens, plus ou moins sa vîtesse primitive. Or, 1°. en vertu de la percussion, le corps A perd une vîtesse exprimée par $\frac{B(V \mp u)}{A+B}$ (370, 373); et, en

vertu du ressort, qui, en se détendant, le repousse dans le sens AM, il perd une nouvelle vitesse, qui doit être exprimée par $\frac{p.B(V \mp u)}{A+B}$, puisque la percussion et l'élasticité étant entre elles dans le rapport de 1 à p, doivent produire sur un même corps des effets qui soient entre eux dans le même rapport. Ainsi, en tout, le corps A fait une perte de vitesse, exprimée par $\frac{B(V \mp u)}{A+B} + \frac{p.B(V \mp u)}{A+B}$, ou par $\frac{(1+p)B(V \mp u)}{A+B}$. Donc la vitesse de A après le choc, dans le sens MN, sera représentée par $V - \frac{(1+p)B(V \mp u)}{A+B}$.

2°. En vertu de la percussion, le corps B gagne, dans le sens MN, une vitesse exprimée par $\frac{A(V \mp u)}{A+B}$ (370, 373); et, en vertu du ressort, qui, en se détendant, le pousse encore dans le sens MN, il doit gagner une nouvelle vitesse exprimée par $\frac{p.A(V \mp u)}{A+B}$, en raisonnant à cet égard comme pour le corps A. Ainsi, en tout, le corps B gagne, dans le sens MN, une vitesse exprimée par $\frac{A(V \mp u)}{A+B} + \frac{p.A(V \mp u)}{A+B}$, ou par $\frac{(1+p).A(V \mp u)}{A+V}$. Donc la vitesse du corps B, après le choc, dans le sens MN, sera représentée par . . . . $\frac{(1+p).A(V \mp u)}{A+B} \pm u$.

Remarque.

376. Ces formules sont susceptibles d'une infinité d'applications. Mais il faut remarquer dans ces applications,

1°. Que le corps choqué B marchera toujours après le choc dans le sens du corps choquant A; ce qui est d'abord évident pour le cas où les deux corps vont dans le même sens avant le choc, et ce qui a lieu aussi lorsque les corps

viennent à la rencontre l'un de l'autre, parcequ'alors nous avons pris pour le corps choquant A celui qui a la plus grande quantité de mouvement; d'où il résulte que ce corps A doit obliger l'autre B à rebrousser chemin, pendant la partie du temps relative à la percussion, et qu'ensuite le ressort, s'il y en a, pousse encore le corps B dans le même sens.

2°. Que le corps choquant A peut revenir sur ses pas après le choc. Ce cas aura lieu, lorsqu'on trouvera, pour l'expression de la vîtesse de ce corps après le choc, une quantité négative.

COROLLAIRE. I.

377. SUPPOSONS $p=0$, ou que le ressort fictif ayant été réduit par la percussion à l'état aCb, y demeure, ce qui est le cas des corps parfaitement mous. Alors on trouve, comme pour les corps parfaitement durs, que les deux corps A et B ont, après le choc, une même vîtesse exprimée par $\frac{AV \pm Bu}{A+B}$.

COROLLAIRE II.

378. SOIT $p=1$, ce qui est le cas des corps parfaitement élastiques, la vîtesse de A, après le choc, est $V - \frac{2B(V \mp u)}{A+B}$, et celle de B est $\frac{2A(V \mp u)}{A+B} \pm u$.

COROLLAIRE III.

379. SI l'on multiplie les corps A et B chacun par l'expression générale de sa vîtesse après le choc, et qu'on ajoute ensemble les deux produits, on aura pour somme, $AV - \frac{(p+1)AB(V \mp u)}{A+B} + \frac{(1+p)AB(V \mp u)}{A+B} \pm Bu$, expres-

sion qui se réduit à $AV \pm Bu$. D'où il résulte qu'après le choc, la quantité de mouvement du systéme et la vîtesse du centre de gravité, dans le sens du corps choquant, sont les mêmes qu'avant le choc. Car, si l'on nomme X la vîtesse du centre de gravité avant le choc, Z sa vîtesse après le choc, on a les équations, $(A+B)X = AV \pm Bu$, $X = \frac{AV \pm Bu}{A+B}$, $(A+B)Z = AV \pm Bu$, $Z = \frac{AV \pm Bu}{A+B}$.

COROLLAIRE IV.

380. Qu'on multiplie chaque corps A et B par le quarré de sa vîtesse générale après le choc, et qu'on ajoute ensemble ces deux produits, on aura pour somme . . . . . .
$$A\left(V - \frac{(1+p)B(V \mp u)}{A+B}\right)^2 + B\left(\frac{(1+p)A(V \mp u)}{A+B} \pm u\right)^2,$$
expression qui se réduit à $AV^2 + Bu^2 - \frac{(1-p^2)AB(V \mp u)^2}{A+B}$.
D'où l'on voit que si $p = 1$, la somme des produits des corps par les quarrés de leurs vîtesses est la même après le choc qu'avant le choc; c'est ce qu'on appelle la *conservation des forces vives*, parcequ'on entend par la *force vive* d'un corps le produit de ce corps par le quarré de sa vîtesse. Mais si p n'est pas $= 1$, il y a, en vertu du choc, une perte de forces vives, exprimée par $\frac{(1-p^2)AB(V \mp u)^2}{A+B}$.

Ainsi, *dans le choc des corps parfaitement élastiques, la conservation des forces vives a lieu en son entier; mais, dans le choc des corps imparfaitement élastiques, il se fait une perte de forces vives, qui est d'autant plus grande, que ces corps approchent davantage d'être parfaitement durs, ou parfaitement mous.*

COROLLAIRE V.

381. Le nombre p, qui exprime le rapport de l'élasticité à la percussion, peut être déterminé dans chaque cas par

une expérience immédiate ; car il ne faut pour cela qu'égaler l'expression générale de la vîtesse de l'un des corps après le choc, à la vîtesse que prend réellement ce corps, et tirer de cette équation la valeur de p.

Supposons, par exemple, que les corps A et B soient égaux, et que B soit en repos à l'instant du choc. En faisant $B = A$, $u = o$, dans les formules qu'on a trouvées pour les vîtesses après le choc, la vîtesse du corps A deviendra, $V - \frac{(1+p)V}{2}$, et celle du corps B deviendra, $\frac{(1+p)V}{2}$. Soient a et b les vîtesses qu'ont réellement, suivant l'expérience, ces deux corps après le choc ; on aura les équations, $a = V - \frac{(1+p)V}{2}$, $b = \frac{(1+p)V}{2}$, lesquelles donnent, $p = 1 - \frac{2a}{V}$, $p = \frac{2b}{V} - 1$. Ces deux équations, par chacune desquelles on peut déterminer p, donnent l'équation de condition $a + b = V$.

Corollaire VI.

382. Soient (Fig. 169) une suite de corps A, B, C, etc., en progression géométrique décroissante, dont la raison est q ; que le corps A, seul en mouvement au premier instant, aille choquer B ; que B, mis ainsi en mouvement, choque C ; que de même C choque D ; ainsi de suite, de maniere que le mouvement se propage du premier corps au dernier. La vîtesse de celui-ci se trouve facilement par les formules précédentes.

En effet, si, dans l'expression générale qu'on a trouvée (375) pour la vîtesse de B après le choc, on fait, conformément à la présente supposition, $u = o$, $B = \frac{A}{q}$; cette vîtesse deviendra, $V \times \frac{(1+p)q}{1+q}$. Comparant le corps C avec le corps B, comme on a comparé le corps B avec le corps A, on trouvera que la vîtesse de C après le choc

est $\left(V \times \frac{(1+p)q}{1+q}\right) \times \frac{(1+p)q}{1+q}$, c'est-à-dire $V \times \frac{(1+p)^2 q^2}{(1+q)^2}$; semblablement, la vîtesse de $D = V \times \frac{(1+p)^3 q^3}{(1+q)^3}$; celle de $E = V \times \frac{(1+p)^4 q^4}{(1+q)^4}$; et, en général, si l'on nomme n le nombre des corps, z la vîtesse du dernier, on aura,

$$z = V \times \frac{(1+p)^{n-1} q^{n-1}}{(1+q)^{n-1}}.$$

Soient, par exemple, $q = 2$, $n = 10$, et $p = 0$, ce qui est le cas des corps parfaitement durs ou mous : on trouvera, $z = V \times \frac{512}{19683}$.

Soient encore $q = 2$, $n = 10$; mais, supposons $p = 1$, ce qui est le cas des corps parfaitement élastiques : on trouvera, $z = V \times \frac{262144}{19683}$.

SECTION II.

Du Choc indirect des Corps.

383. Cette matiere est fort riche; mais je me bornerai à quelques problêmes, qui mettront suffisamment le lecteur sur la voie de ces recherches. Je supposerai, pour abréger encore, que les corps dont il va être question sont parfaitement durs, ou parfaitement élastiques.

Proposition I. Lemme.

384. Si *un corps sphérique et dur* A (Fig. 170) *va choquer obliquement un corps sphérique et dur* B *en repos, la vîtesse du corps* A, *après le choc, sera à la vîtesse du corps* B, *comme le sinus total est au cosinus de l'angle que feront entre elles les directions des deux vîtesses.*

Soit IAF la direction du corps A avant le choc. Il est clair que la percussion se fait à l'instant que la distance AB des centres des deux corps est égale à la somme de leurs rayons. On voit encore que AB sera la direction du corps B après le choc. Soit AZ la direction du corps A aussi après le choc; et supposons que, pendant la durée instantanée de la percussion, les deux corps parcourent les espaces infiniment petits A*a*, B*b*. Soit tirée la droite *ab*; on aura, $ab = AB$, puisque les deux corps se touchent en parcourant A*a*, B*b*. Du point *b* comme centre, soit décrit, avec le rayon *b*A, l'arc infiniment petit A*m*, entre les côtés *b*A, *bam*, de l'angle infiniment petit A*bm*. En retranchant membre à membre l'équation $BA = ba$, de l'équation $bA = bm$, on aura, $Bb = am$. Cela posé, le petit triangle *am*A, qu'on peut considérer comme un triangle rectiligne rectangle en *m*, donne cette proportion, où je nomme R le sinus total, $Aa : am$ ou $Bb :: R : \sin. aAm :: R : \cos. BAZ$. Or A*a* et B*b* sont les vitesses des deux corps à l'instant où finit le choc, et par conséquent aussi leurs vitesses après le choc. Ainsi la vitesse du corps A après le choc est à la vitesse du corps B, comme le sinus total est au cosinus de l'angle que font entre elles les directions des deux vitesses.

Proposition II. Problème.

385. Le *corps dur* A (Fig. 171) *allant choquer obliquement le corps dur* B *en repos, trouver les vitesses de ces deux corps après le choc.*

Supposons qu'à l'instant du choc on joigne les centres A et B des deux corps par la droite AB; cette ligne sera la direction de la vitesse du corps B après le choc. Représentons par AM la quantité de cette même vitesse. Soient AF la vitesse du corps A avant le choc, AE sa vitesse après le choc. Ayant construit le parallélogramme AEFH, on remarquera que la vitesse primitive AF peut être décomposée en deux autres AE, AH. Ainsi le corps choquant est dans le

même cas que si, étant arrivé en A, il étoit animé des deux vîtesses AE, AH. Or il prend réellement la vîtesse AE; donc AH est la vîtesse qu'il perd, et c'est en vertu de cette vîtesse toute entiere qu'il pousse le corps B. Donc AH tombe sur la direction AB; et on a l'équation fondamentale,

(A) $A \times AH = B \times AM$.

Supposons
- la vîtesse donnée AF . . . . . . $= V$
- le sinus total . . . . $= 1$
- le sinus de l'angle donné BAF . . $= a$
- son cosinus . . . . $= b$
- la vîtesse inconnue AE . . . . . . $= x$
- le sinus de l'angle inconnu FAE . . $= y$
- son cosinus . . . . $= z$.

L'angle BAE étant égal à la somme des deux angles BAF, FAE, on aura, sin. BAE ou sin. AEF $= az + by$; cos. BAE $= bz - ay$. Le triangle AEF donne, sin. AFE ou sin. BAF (a) : sin. FAE (y) : : AE (x) : EF ou AH $= \frac{xy}{a}$. D'un autre côté, on a, AM $=$ AE $\times$ cos. BAE $= x(bz - ay)$. Mettant ces valeurs de AH et de AM dans l'équation (A), on aura, $\frac{Axy}{a} = Bx(bz - ay)$, ou bien $Ay = Babz - Baay$, ou bien $(A + Ba^2)y = Babz$, ou bien (en mettant pour z sa valeur $\sqrt{(1 - yy)}$, quarrant chaque membre et dégageant y) $y = \frac{Bab}{\sqrt{[(A + Ba^2)^2 + B^2a^2b^2]}}$. Mettant cette valeur de y dans l'équation $z = \sqrt{(1 - yy)}$, on aura, ... $z = \frac{A + Ba^2}{\sqrt{[(A + Ba^2)^2 + B^2a^2b^2]}}$.

Le triangle AEF donne encore, sin. AFE ou sin. BAF (a) : (sin. AEF $(az + by)$: : AE (x) : AF (V); et par conséquent $x = \frac{aV}{az + by}$. Mettant dans cette équation pour y et z leurs valeurs, on trouvera (en observant que $a^2 + b^2 = 1$), $x = \frac{V\sqrt{[(A + Ba^2)^2 + B^2a^2b^2]}}{A + B}$.

Connoissant, au moyen des valeurs de y, z, x, la direction et la quantité de la vîtesse AE du corps choquant après le choc, on connoîtra aussi la vîtesse AM du corps choqué, puisque $AM = AE \times \cos. BAE$. L'expression de cette vîtesse en ligne se trouve tout de suite, en abaissant du point E la perpendiculaire EM sur AB; car alors $AM = AE \times \cos. BAE$.

PROPOSITION III. PROBLÊME.

386. LE *corps élastique* A *allant choquer obliquement le corps élastique* B *en repos, trouver les vîtesses des deux corps après le choc.*

Je cherche d'abord les vîteses AE, AM, comme si les deux corps étoient durs.

On voit, par l'article 375, que, dans le choc direct des corps parfaitement élastiques, la vîtesse perdue par le corps choquant et la vîtesse gagnée par le corps choqué sont l'une et l'autre doubles de ce qu'elles auroient été, s'il n'y avoit point eu de ressort. La même chose est vraie dans le choc indirect des corps élastiques, en supposant, comme nous faisons, que les corps sont parfaitement homogenes dans toutes leurs parties, et que par conséquent leurs ressorts, après avoir été comprimés, se détendent en toutes sortes de sens, avec la même force et suivant la même direction qu'ils ont été comprimés.

Sur ce principe, il est clair que, si, ayant prolongé FE de maniere qu'on ait, $Fe = 2 FE$, on tire Ae, et qu'on double AM, les lignes Ae, 2 AM, exprimeront ici les vîtesses des deux corps après le choc, puisque les lignes FE, AM, expriment respectivement la vîtesse perdue par le corps A, et la vîtesse gagnée par le corps B, dans le cas où ces deux corps sont parfaitement durs.

PROPOSITION IV. PROBLÈME.

387. LE *corps dur* A (Fig. 172) *allant choquer à la fois obliquement un nombre quelconque de corps durs* B, C, D, *en repos : on demande les vîtesses de tous ces corps après le choc.*

Il n'y a que quatre corps dans la Figure; mais on procéderoit de même pour un plus grand nombre.

Qu'on joigne, à l'instant du choc, le centre du corps A avec les centres des corps B, C, D, par les droîtes AB, AC, AD; il est évident que ces lignes seront les directions des vîtesses des corps B, C, D, après le choc. Soient AF la vîtesse du corps A avant le choc, AE sa vîtesse après le choc, FAE l'angle formé par les directions AF, AE; soit tirée FE, et soit achevé le parallélogramme AHFE. Il est clair que AH est la vîtesse perdue par le corps A. Soient AM, AP, AS, les vîtesses des corps B, C, D; et décomposons les vîtesses AH, AM, AP, AS, chacune en deux autres AL, AG; AN, AO; AQ, AR; AT, AV, dont les premieres soient dirigées suivant AF, et les autres soient perpendiculaires à AF.

Cela posé, le corps choquant arrivé en A est dans le même cas que s'il étoit animé des vîtesses AE, AL, AG. Or il prend réellement la vîtesse AE. Donc, en vertu des vîtesses AL, AG, il agit sur les corps B, C, D; et la quantité de mouvement qu'il perd dans le sens AL est $A \times AL$; celle qu'il perd dans le sens AG est $A \times AG$. D'un autre côté, les corps B, C, D, qui reçoivent réellement, en vertu du choc, les vîtesses AM, AP, AS, sont dans le même cas que si B recevoit les deux vîtesses AN, AO; C, les deux vîtesses AQ, AR; D, les deux vîtesses AT, AV. Donc, en regardant les trois corps comme ne formant qu'un même systéme, on voit (354) que la quantité de mouvement de ce système dans le sens AL est $B \times AN + C \times AQ + D \times AT$, et que sa quantité de mouvement

dans le sens AG est B × AO — C × AR — D × AV. Égalons ces quantités de mouvements gagnés par les corps choqués à celles que le corps A perd dans les mêmes sens, et nous aurons les deux équations fondamentales :

$$\text{(A)}\quad A \times AL = B \times AN + C \times AQ + D \times AT,$$
$$\text{(B)}\quad A \times AG = B \times AO - C \times AR - D \times AV.$$

Nommons
- sinus total 1,
- sin. BAF . . . . a,
- cos. BAF . . . . b,
- sin. CAF . . . . c,
- cos. CAF . . . . d,
- sin. DAF . . . . e,
- cos. DAF . . . . f,
- la vîtesse AF . . . . V,
- sin. FAE . . . . y,
- cos. FAE . . . . z,
- la vîtesse AE . . . . x.

Parmi ces quantités, il n'y a que x, y, z, d'inconnues. Soit abaissée EK perpendiculaire sur AF; on aura, EK ou $AG = \frac{AE \times \text{sin. FAE}}{\text{sin. tot.}} = xy$, $AK = xz$, KF ou $AL = V - xz$.

L'angle BAE étant la somme des deux angles BAF, FAE; l'angle CAE, la différence des deux angles CAF, FAE; l'angle DAE, la différence des deux angles DAF, FAE; on aura (Géom.) cos. BAE $= bz - ay$; cos. CAE $= dz + cy$; cos. DAE $= fz + ey$. Mais (384), AM = AE × cos. BAE, AP = AE × cos. CAE, AS = AE × cos. DAE. Donc AM $= x(bz - ay)$; AP $= x(dz + cy)$; AS $= x(fz + ey)$. De plus, on a évidemment, AN = AM × cos. BAF $= bx(bz - ay)$; AO = AM × sin. BAF $= ax(bz - ay)$; AQ = AP × cos. CAF $= dx(dz + cy)$; AR = AP × sin. CAF $= cx(dz + cy)$; AT = AS × cos. DAF $= fx(fz + ey)$; AV = AS × sin. DAF $= ex(fz + ey)$. Par conséquent, les deux équations (A) et (B) se traduiront ainsi :

$$\text{(C) } \mathrm{AV} - \mathrm{A}xz = \begin{cases} \mathrm{B}bx\,(bz - ay) + \mathrm{C}dx\,(dz + cy) + \\ \mathrm{D}fx\,(fz + ey), \end{cases}$$

$$\text{(D) } \mathrm{A}xy = \mathrm{B}ax\,(bz - ay) - \mathrm{C}cx\,(dz + cy) - \mathrm{D}ex\,(fz + ey).$$

L'équation (D) donne (en divisant tout par x, et transposant), $y\,(\mathrm{A} + \mathrm{B}a^2 + \mathrm{C}c^2 + \mathrm{D}e^2) = z\,(\mathrm{B}ab - \mathrm{C}cd - \mathrm{D}ef)$. Mettant dans cette équation pour z sa valeur $\sqrt{(1 - yy)}$, ou pour y sa valeur $\sqrt{(1 - zz)}$, quarrant chaque membre, et dégageant y ou z, on trouvera :

$$y = \frac{\mathrm{B}ab - \mathrm{C}cd - \mathrm{D}ef}{\sqrt{[(\mathrm{A} + \mathrm{B}a^2 + \mathrm{C}c^2 + \mathrm{D}e^2)^2 + (\mathrm{B}ab - \mathrm{C}cd - \mathrm{D}ef)^2]}},$$

$$z = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}a^2 + \mathrm{C}c^2 + \mathrm{D}e^2}{\sqrt{[(\mathrm{A} + \mathrm{B}a^2 + \mathrm{C}c^2 + \mathrm{D}e^2)^2 + (\mathrm{B}ab - \mathrm{C}cd - \mathrm{D}ef)^2]}}.$$

L'équation (C) donne,

$$x = \frac{\mathrm{AV}}{z\,(\mathrm{A} + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{C}d^2 + \mathrm{D}f^2) - y\,(\mathrm{B}ab - \mathrm{C}cd - \mathrm{D}ef)}.$$

Donc, en mettant pour z et y leurs valeurs,

$$x = \frac{\mathrm{AV}\sqrt{[(\mathrm{A} + \mathrm{B}a^2 + \mathrm{C}c^2 + \mathrm{D}e^2)^2 - (\mathrm{B}ab - \mathrm{C}cd - \mathrm{D}ef)^2]}}{(\mathrm{A} + \mathrm{B}a^2 + \mathrm{C}c^2 + \mathrm{D}e^2) \times (\mathrm{A} + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{C}d^2 + \mathrm{D}f^2) - (\mathrm{B}ab - \mathrm{C}cd - \mathrm{D}ef)^2}.$$

Ainsi on connoît de direction et de grandeur la vîtesse du corps choquant après le choc. On connoîtra donc aussi les vîtesses AM, AP, AS, des corps choqués B, C, D, puisque tout est maintenant connu dans les expressions AE × cos. BAE, AE × cos. CAE, AE × cos. DAE, de ces vîtesses.

Proposition V. Problème.

388. Le *corps élastique* A *allant choquer à la fois obliquement les corps élastiques* B, C, D, *en repos, trouver les vîtesses de tous ces corps après le choc.*

Ayant déterminé, par le problême précédent, les vîtesses des corps proposés comme s'ils étoient parfaitement durs, je prolonge FE, de maniere qu'on ait, FEe = 2 FE, et je tire Ae. Alors la vîtesse du corps choquant après le choc est Ae, et les vîtesses des corps B, C, D, sont 2 AM, 2 AP, 2 AS, respectivement.

SCHOLIE.

389. Les problêmes précédents ne seroient pas plus difficiles à résoudre, si les corps choqués B, C, D, au lieu d'être en repos, comme nous l'avons supposé, avoient des mouvements quelconques, de maniere cependant qu'ils fussent tous frappés en même temps par le corps A. On trouvera dans tous les cas que, lorsque les corps sont parfaitement élastiques, les forces vives se conservent en leur entier, de même que dans le choc direct. Nous ne pouvons pas nous étendre davantage sur ce sujet.

CHAPITRE II.

Du Mouvement d'un corps libre quelconque poussé suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité.

390. Qu'un corps sphérique et homogene soit frappé par un autre corps, suivant une direction quelconque, il ne prendra qu'un simple mouvement progressif, sans tourner sur lui-même; car, si l'on décompose la force de la percussion en deux autres, l'une tangente, l'autre perpendiculaire au corps choqué, à l'endroit du contact, on verra que la premiere ne produit aucun effet, et que la seconde, qui est dirigée vers le centre, pousse simplement ce point, sans faire tourner le corps. Mais il y a une infinité de corps qui ne sont pas sphériques; et il peut arriver de plusieurs manieres que la force imprimée utilement à un corps, soit qu'elle provienne d'une percussion immédiate, soit d'une traction quelconque, ne passe pas par son centre de gravité.

Si même un corps sphérique est tiré par un fil attaché à sa surface, suivant une direction qui passe hors de son centre, ou s'il est soumis à une attraction qui pénetre sa masse, et qui laisse son centre de côté, il se rapportera au cas dont je viens de parler. Or, lorsqu'une masse de figure quelconque est poussée suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité, il est évident que toutes ses parties ne doivent pas parcourir des espaces égaux et paralleles, mais que celles qui sont en-delà du centre de gravité, par rapport à la force motrice, doivent aller moins vîte que les autres. D'où il est aisé de voir, en général, que le mouvement absolu du corps est composé d'un mouvement de translation, et d'un ou plusieurs mouvements de rotation autour du centre de gravité. Voici le principe d'après lequel tous ces mouvements peuvent être déterminés.

PROPOSITION I. THÉORÊME.

391. LORSQU'UN *corps est poussé suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité, 1°. ce centre est mu de la même maniere que s'il se trouvoit sur la direction de la force imprimée. 2°. Le corps tourne, du moins au premier instant, comme si le centre de gravité étoit fixe, autour d'un axe mené par ce centre, perpendiculairement au plan passant par ce même point et par la direction de la force.*

Soit un corps de figure quelconque (Fig. 173), poussé par une force F, dont la direction FK passe hors de son centre de gravité G. Par ce point et par la droite FK, soit mené le plan MRD, qui divise le corps en deux parties; et soit tiré l'axe GV perpendiculaire à ce plan. Je prends FA pour représenter la force F; et, ayant divisé cette ligne FA en deux également au point B, sur FB comme diagonale, je construis le parallélogramme FNBO, dont le côté FN passe par le centre de gravité G, et dont le côté FO est perpendiculaire à FB. La moitié FB de la force FA peut se

décomposer en deux autres forces FN, FO. Soit prolongée FG de maniere que GT = FG, et soit prise TQ = FN. Imaginons que la force FN est appliquée au point T de sa direction, et qu'elle est représentée par TQ ; ensuite soit décomposée cette force en deux autres TP, TZ, l'une perpendiculaire, l'autre parallele à KGS.

Cela posé, il est clair que le corps est mu de la même maniere que si, au lieu d'être animé de la force primitive FA, il étoit animé des quatre forces BA, FO, TP, TZ. Or, 1°. les deux forces BA, TP, étant paralleles, égales, et passant à égales distances du centre de gravité, comme il est évident, elles ont pour résultante (45) une force GE, qui passe par le centre de gravité G, qui leur est parallele, et qui est égale à leur somme, puisqu'elles agissent dans le même sens. De plus, puisque BA + TP = FA, on aura aussi, GE = FA. D'où il suit que le centre de gravité G est mu exactement de la même maniere que s'il se trouvoit sur la direction de la force proposée FA.

2°. Les deux forces FO, TZ, sont évidemment égales, paralleles, et passent à égales distances du centre de gravité G, suivant des directions opposées; donc elles ne peuvent faire avancer ce centre ni suivant GK, ni suivant GS, ni suivant aucune autre direction. Donc, en vertu de ces deux forces, le centre de gravité G doit demeurer immobile. Mais, d'un autre côté, ces deux mêmes forces ne se détruisent pas, puisqu'elles ne sont pas directement opposées. Donc tout l'effet qu'elles peuvent produire est de faire tourner, du moins au premier instant, le corps dans le même sens autour de l'axe GV, en agissant perpendiculairement aux extrémités des bras de levier GH, GI. Donc, si du point G comme centre, avec le rayon GH ou GI, on décrit un cercle, on pourra imaginer, relativement au mouvement de rotation, que la force TZ, au lieu d'agir suivant ITZ, à l'extrémité du rayon GI, agit, suivant HFO, à l'extrémité du rayon GH. Alors le moment de la force, qui fait tourner le corps dans le sens *Hhli*,

est $(FO + TZ) \times GH$, ou $2FO \times FK$, ou $2BN \times FK$. Or, à cause des triangles semblables FKG, FBN, on a, $BN \times FK = FB \times GK$, et par conséquent $2BN \times FK = 2FB \times GK = FA \times GK$, qui est l'expression du moment de la force proposée FA par rapport à l'axe GV. Donc le corps tendra à tourner autour de cet axe de la même maniere que si le centre de gravité étoit fixe.

Remarque.

392. Soit que le plan MRD partage ou non le corps en deux parties égales et semblables, le mouvement du centre de gravité est toujours le même. Mais le mouvement de rotation instantanée autour de l'axe GV ne se perpétue que dans le premier cas; car, lorsque les deux parties du corps ne sont pas égales et semblables, les forces centrifuges, en vertu desquelles les molécules du corps tendent à s'écarter de l'axe GV, ne se font pas équilibre; l'axe GV s'incline d'un côté ou d'autre, et le corps pirouette en différents sens autour de son centre de gravité. Tous ces mouvements peuvent être soumis au calcul par les principes précédents; mais l'analyse des équations auxquelles ils conduisent ne peut pas trouver place dans cet ouvrage. Je suppose donc, dans ce qui suit, que le plan perpendiculaire à l'axe de rotation partage le corps en deux parties égales et semblables, et alors le mouvement de rotation demeure toujours le même comme le mouvement de translation du centre de gravité; ou si cette condition n'a pas lieu, je ne considere le mouvement de rotation autour de l'axe proposé que pour le premier instant.

Proposition II. Problême.

393. Le *corps parfaitement dur* A (Fig. 174) *allant choquer perpendiculairement le corps parfaitement dur* G *en repos, suivant la direction* AK *qui passe hors du centre*

de gravité G de ce dernier, trouver les vîtesses des deux corps après le choc.

Supposons que, sans la rencontre du corps G, le corps A eût parcouru librement en un instant l'espace infiniment petit Aa; mais qu'à cause de la réaction du corps G, il ne parcoure que Ab. De plus, supposons que le centre de gravité G du corps choqué parcoure l'espace infiniment petit Gg parallele à AK, et qu'en même temps ce corps décrive, autour de l'axe GV transporté en gu, l'angle infiniment petit hgi. Soit menée du centre de gravité G du corps choqué la droite GK, perpendiculaire à la direction du corps choquant, et qui sera en même temps perpendiculaire à l'axe GV. Cela posé, il est clair d'abord que le mouvement perdu par le corps A est $A \times ba$, et que le mouvement de translation gagné par le corps G est $G \times Gg$. Ainsi on aura, par la premiere partie du théoréme précédent et par l'article 369, (A) $A \times ba = G \times Gg$.

Regardons, ainsi qu'il est permis par la seconde partie du théorême précédent, le point G comme immobile. Le moment du mouvement perdu ou de la force perdue par le corps A, relativement à l'axe GV, est $A \times ba \times GK$. Ce moment doit être égal au moment du mouvement gagné ou de la force gagnée par le corps G, relativement au même axe, parceque la seconde des forces dont il s'agit résiste au mouvement de rotation que la premiere tend à produire, et qu'il doit y avoir équilibre entre ces deux efforts contraires. Or, si l'on considere une molécule élémentaire quelconque m du corps G, placée à telle distance qu'on voudra de l'axe GV ou gu, et qu'on suppose que cette molécule décrive, avec le rayon gm, le petit arc my, tandis qu'un point donné h décrit, avec le rayon donné gh, le petit arc hi, il est évident qu'en prenant hi pour représenter la vîtesse de rotation du point h, la vîtesse my de la molécule m aura pour expression, $gm \times \frac{hi}{gh}$. Ainsi le mouvement gagné par la molécule m, est $m \times gm \times \frac{hi}{gh}$; et le moment de ce

mouvement, relativement à l'axe gu, est $m \times gm \times \frac{hi}{gh} \times gm$, ou $m \times (gm)^2 \times \frac{hi}{gh}$, expression par laquelle on voit que, pour avoir le moment du mouvement gagné par chaque molécule, il faut multiplier chaque molécule par le quarré de sa distance à l'axe de rotation, ensuite multiplier le produit par la fraction $\frac{hi}{gh}$, qui est toujours la même, en quelque endroit qu'on prenne la molécule. Donc, puisqu'il y a autant de ces moments particuliers qu'il y a de molécules dans la masse G, et que le moment total du mouvement gagné par la masse G, autour de l'axe GV ou gu, est égal à la somme des moments des mouvements gagnés par toutes les molécules; il s'ensuit que, si l'on nomme S la somme des produits des molécules par les quarrés de leurs distances à l'axe proposé, le moment du mouvement gagné par le corps autour de cet axe aura pour valeur, $S \times \frac{hi}{gh}$. Nous aurons donc cette seconde équation, ...

(B) $A \times ba \times GK = S \times \frac{hi}{gh}$.

Nommons
- la ligne connue GK . . . . a,
- la vîtesse Aa du corps A avant le choc . . V,
- sa vîtesse Ab après le choc . . . . . x,
- la vîtesse Gg du centre de gravité G . . u,
- le rayon donné gh . . . . r,
- la vîtesse hi de rotation du point h . . z.

Les deux équations (A) et (B) se traduiront ainsi, $A(V - x) = Gu$; $A(V - x)a = \frac{Sz}{r}$, ou $A(V - x)ar = Sz$.

Dans ces deux équations, on a trois inconnues; savoir, x, u, z. Mais il faut faire attention que, pendant la durée du choc, le corps A demeure toujours contigu au corps G; que, par conséquent, si l'on mene gk parallele à GK, et que kn soit le petit arc décrit par le point k, tandis que le

point h décrit hi, on a, $Ab = Kn$; d'où il résulte qu'à cause de $kn = \frac{az}{r}$, on aura cette troisieme équation, . . .

(E) $x = u + \frac{az}{r}$.

Comparant ensemble ces équations, et dégageant les inconnues, on trouvera, $x = \frac{AV(S + a^2G)}{(A+G)S + a^2AG}$; $u =$ . . . $\frac{AV.S}{(A+G)S + a^2AG}$; $z = \frac{AV.arG}{(A+G)S + a^2AG}$.

Ainsi on connoît la vîtesse du corps A après le choc, la vîtesse de translation du corps G, et la vîtesse de rotation du point donné h, et par conséquent aussi celle de tout autre point.

Corollaire I.

394. Les deux mouvements que le corps G a reçus ainsi à la fois, sont ensuite indépendants l'un de l'autre, de telle maniere que l'un peut être anéanti sans que l'autre le soit, du moins en totalité. En effet, si l'on suppose que le centre de gravité G vienne à rencontrer dans son chemin une résistance qui ait au moins pour valeur Gu, cette résistance détruira le mouvement de translation du corps G, mais elle ne produira aucun changement dans le mouvement de rotation. Et si l'on suppose que le corps G porte un levier GT, fixe et sans pesanteur, qui soit rencontré perpendiculairement par une résistance ou force T, dirigée suivant TZ, et telle que l'on ait, $T \times GT = S \times \frac{z}{r} = Gu \times a$, le mouvement de rotation sera détruit ; mais le mouvement de translation subsistera, du moins en partie ; ce mouvement sera toujours dirigé dans le sens Gg, le point T étant supposé placé à la gauche de K ; mais il n'aura plus pour valeur que $Gu - T$; et la vîtesse du centre de gravité G deviendra, $\frac{Gu - T}{G}$, ou $u - \frac{T}{G}$. La force T doit être évaluée par le produit d'nne masse et d une vîtesse ; elle est

de même nature que le mouvement perdu A (V — x) par le corps A dans le premier choc.

On explique par-là certains mouvements qu'on observe dans les boulets de canons. On voit souvent de ces boulets, qui, après avoir perdu en apparence toute leur vîtesse, se raniment subitement, et font encore plusieurs bonds, qui peuvent être très dangereux. Pour rendre raison de ce phénomene, il faut considérer qu'un boulet, au sortir du canon, n'a pas seulement un mouvement de translation, mais que, soit en vertu du frottement contre la paroi inférieure de l'ame du canon, ou des inégalités dans les impulsions des grains de poudre, ou de quelque autre cause physique, il a reçu encore un mouvement de rotation. Or il peut arriver que, lorsque le boulet est tombé, son mouvement de translation primitive soit éteint, mais que le mouvement de rotation subsiste encore. Alors le boulet peut tourner sur lui-même autour d'un axe vertical; et sa vîtesse peut être telle qu'il paroisse immobile; mais si, par quelque cause, comme par la résistance d'une pierre, l'axe de rotation s'incline et devient horizontal, le mouvement de rotation produira nécessairement un nouveau mouvement de translation; mouvement, à la vérité, beaucoup moindre que celui du boulet au sortir du canon, mais capable néanmoins de produire des effets très sensibles, à raison de la grande masse du mobile.

Corollaire II.

395. Si on veut que la vîtesse du point donné h soit à celle u du centre de gravité du corps G, dans la raison donnée de q à n, on aura, par nos formules générales, $q : n :: Gar : S$. Or, puisque cette proportion ne renferme ni A ni V, il s'ensuit que, quelle que puisse être la quantité de mouvement du corps choquant A, il y aura toujours le même rapport entre le mouvement de translation du centre de gravité du corps G et le mouvement de rotation d'un

point donné du corps, pourvu seulement que la direction du corps choquant passe toujours à la même distance a du centre de gravité G.

Cette théorie sert à expliquer, par une même cause, dans le système newtonien, le mouvement de translation des planetes autour du soleil et leurs mouvements de rotation autour de leurs axes. Car supposons que le corps G soit une planete regardée comme sphérique; que le point h soit à sa surface, ou que r en soit le rayon; on connoît, par les observations astronomiques, la raison de z à u, c'est-à-dire $\frac{q}{n}$. Donc, puisqu'on a, $q : n :: Gar : S$, et par conséquent $a = \frac{Sq}{nGr}$; on voit que, si une planete est mise en mouvement par une force dont la direction passe à la distance $\frac{Sq}{nGr}$ de son centre, cette planete prendra les deux mouvements qu'on lui a attribués. Cette idée ingénieuse est due à Jean Bernoulli.

SCHOLIE.

396. LORSQU'ON voudra appliquer les formules précédentes à des exemples particuliers, la détermination de la quantité S est la seule opération qui puisse avoir quelque difficulté; cette opération s'exécute par les regles que la géométrie prescrit pour le toisé de l'étendue: ordinairement elle demande le secours du calcul intégral; mais, quelque méthode qu'on emploie pour y parvenir, il faut observer que le toisé géométrique ne donne que des mesures relatives au volume et non à la masse du corps. Ainsi, lorsqu'on aura trouvé S par la géométrie, il faudra multiplier cette quantité par la densité du corps, laquelle est toujours relative à celle d'un autre corps, comme nous l'avons déja dit (100), et qu'on pourra prendre ici comparativement à celle du corps choquant A.

Exemple.

397. Supposons *que le corps* G *soit une baguette* MN (Fig. 175), *fort mince et uniforme dans sa grosseur.*

La baguette étant fort mince, chaque tranche Yy, perpendiculaire à sa longueur, aura ou du moins pourra être censée avoir tous ses points à égales distances de l'axe GV. Soit la surface de chacune de ces tranches $= cc$, la demi-longueur GM ou GN de la baguette $= h$; supposons de plus que la densité du corps choquant étant exprimée par 1, celle de la baguette soit exprimée par p.

Cela posé, puisque le produit de chaque tranche par le quarré de sa distance au centre de gravité G de la baguette est exprimé par $Yy \times (Go)^2$, et que tous ces produits croissent évidemment depuis le point G jusqu'au point M, comme les éléments d'une pyramide dont la base seroit proportionnelle à $Yy \times (GM)^2$, et la hauteur à GM, il s'ensuit que la somme des produits de toutes les particules de la demi-baguette GM par les quarrés de leurs distances au point G sera exprimée par $Yy \times (GM)^2 \times \frac{GM}{3} = \frac{cch^3}{3}$. Le même raisonnement et la même conclusion ont lieu pour l'autre demi-baguette GN. Par conséquent nous aurons ici, $S = p \times \frac{2c^2h^3}{3}$. Substituant cette valeur de S dans les formules générales de l'article 393; mettant aussi pour G sa valeur, qui est ici, $2pc^2h$: on trouvera,

$$x = \frac{AV(h^2 + 3a^2)}{(A + 2pc^2h).h^2 + 3a^2.A},$$

$$u = \frac{AV.h^2}{(A + 2pc^2h).h^2 + 3a^2.A},$$

$$z = \frac{3AV.ar}{(A + 2pc^2h).h^2 + 3a^2.A}.$$

PROPOSITION III. PROBLÊME.

398. DÉTERMINER *le mouvement d'un cercle homogene* (Fig. 176), *qui descend par sa pesanteur le long d'un plan incliné* AB, *et qui éprouve un frottement proportionnel à la pression.*

Représentons la pesanteur absolue du cercle par la verticale GP, et décomposons cette force en deux autres GZ, GQ, l'une perpendiculaire, l'autre parallele au plan incliné AB. La force GQ fait descendre le corps, et la force GZ exprime sa pression sur le plan incliné AB. Le frottement, supposé proportionnel à la pression, est une certaine partie de GZ; il doit être regardé comme une force dirigée suivant BA, tangentiellement à la circonférence du cercle. Ainsi le cercle est soumis à l'action de deux forces, dont l'une GQ, qui passe par son centre de gravité, ne peut lui imprimer qu'un simple mouvement progressif; l'autre, qui est le frottement, tend à ralentir son mouvement progressif, et en même temps à faire tourner le corps autour de son centre de gavité. On voit que le frottement fait ici la même fonction que le corps A dans le problême de l'article 393.

Soient {
le rayon du cercle . . . . r,
le rapport de la circonférence au diametre . π,
le sinus total 1,
l'angle BAC, ou l'arc qui, décrit avec le rayon 1, est la mesure de cet angle . . . m,
la gravité, c'est-à-dire l'espace que cette force fait parcourir à un corps dans un instant . g,
le rapport du frottement à la pression . . n,
la densité du cercle . . . . 1.

L'aire ou le volume du cercle ayant, comme on sait, πr^2 pour valeur, sa masse sera représentée par la même quantité, parceque la masse est le produit du volume par la densité (6); et son poids sera représenté par $\pi g r^2$, parceque

19.

le poids est le produit de la masse par la gravité (303). De plus, on aura, Force GQ $= g.\pi r^2 \cos. m$; Force GZ $= g.\pi r^2 \sin. m$; Frottement $= g.n\pi r^2 \sin. m$. Ainsi la force qui pousse effectivement le corps dans le sens GQ, ou l'excès de la force GQ sur le frottement, sera $g. (\pi r^2 \cos. m - n\pi r^2 \sin. m)$. Divisant cette force par πr^2, on aura, $g(\cos. m - n \sin. m)$, pour l'expression de la force accélératrice simple du cercle proposé. Cette force étant à la gravité g dans le rapport constant de $\cos. m - n \sin. m$ à 1, on voit que le cercle descendra d'un mouvement uniformément accéléré, et qu'on aura tout ce qui est relatif à ce mouvement, par le moyen des formules de l'article 315. Voilà pour le mouvement progressif ou de translation.

Du point G comme centre, avec les deux rayons infiniment peu différents GE, G*e*, soient décrits deux cercles concentriques. La somme des produits des particules, comprises dans la couronne EDF*fed*, par les quarrés de leurs distances au centre G, sera représentée par $2\pi \times Ee \times (GE)^3$. Or, si l'on imagine que le rayon GH soit divisé en une infinité de parties égales, dont chacune peut être exprimée par E*e*, il est évident que les produits élémentaires $2\pi \times Ee \times (GE)^3$ composeront une suite infinie, dont le nombre des termes est exprimé par GH, et qui sont entre eux comme les termes de la suite infinie des cubes 1, 8, 27, 64, etc. Donc, puisque la somme de cette derniere suite est représentée en général (Algebre) par $\frac{N^4 + 2N^3 + N^2}{4}$, en nommant N le nombre des termes; que, dans le cas de $N = \infty$, cette somme devient $\frac{N^4}{4}$; il s'ensuit que la somme des produits $2\pi \times Ee \times (GE)^3$ est $\frac{2\pi \times (GH)^4}{4}$, ou $\frac{\pi.r^4}{2}$.

Maintenant, si l'on nomme z la vitesse instantanée de rotation d'un point de la circonférence HRM, on trouvera, comme dans l'article 393, $g.n\pi r^2 (\sin. m) \times r = \frac{\pi.r^4}{2} \times \frac{z}{r}$, et par conséquent $z = g \times 2n \sin. m$. Par où l'on voit que la

vitesse de rotation s'accélérera uniformément. Ainsi, en regardant z comme une force accélératrice simple, qui est à la gravité naturelle g dans le rapport constant de $2\,n$ sin. m à 1, on déterminera tout ce qui est relatif au mouvement de rotation, par le moyen de l'article 315 déja cité.

COROLLAIRE.

399. SUPPOSONS que le mouvement de rotation de la circonférence soit égal au mouvement progressif du centre : on aura alors l'équation, $g \times 2\,n.\ \text{sin.}\ m = g\,(\text{cos.}\ m - n\ \text{sin.}\ m)$, de laquelle on tire $n = \frac{\text{cos.}\ m}{3\ \text{sin.}\ m}$. Ainsi le nombre n, qui exprime le rapport du frottement à la pression, ne peut pas être donné *à priori* ; mais il se détermine par les conditions du probléme.

CHAPITRE III.

Du Mouvement des pendules simples ou composés ; du centre de percussion.

400. ON appelle *pendule simple* un petit poids P (Fig. 177) suspendu par un fil ou par une verge de masse insensible, qui oscille librement autour d'un point fixe C.

Un *pendule composé* est l'assemblage de plusieurs corps liés solidement entre eux, et qui oscillent autour d'un point ou d'un axe fixe. Lorsque les verges, par lesquelles les corps sont attachés les uns aux autres, ont des pesanteurs sensibles, il faut regarder ces poids comme faisant partie du système.

Chaque allée d'un pendule depuis un point quelconque P

jusqu'au point p', où le pendule cesse de monter pour redescendre, s'appelle une *oscillation*. On donne le même nom au retour depuis le point p' jusqu'au point P.

On sent que les oscillations d'un pendule composé ne doivent pas être de même durée que seroient celles d'un des poids élémentaires qui le composent, si ce poids étoit isolé, parceque tous ces poids se troublent dans leurs mouvements, par l'action et la réaction qu'ils exercent les uns sur les autres. Mais on peut toujours assigner la longueur d'un pendule simple, qui fasse ses oscillations dans le même temps que le pendule composé. Cette longueur tient un certain milieu entre les distances de tous les poids qui forment le pendule composé, jusqu'au point de suspension. Nous donnerons ce problème, après avoir expliqué les propriétés fondamentales des pendules simples.

PROPOSITION I. THÉORÊME.

401. UN *pendule* P, *animé par la seule pesanteur*, *étant arrivé du point* P *au point* A *situé dans la verticale*, *montera de l'autre côté*, *et décrira dans le même temps l'arc* Ap', *égal à l'arc* AP.

En effet, le pendule, arrivé en A, doit monter en vertu des degrés de vitesse que la pesanteur lui a imprimés lorsqu'il descendoit ; et, comme cette force continue d'agir sur lui dans le même sens pendant qu'il monte, elle doit lui enlever alors successivement tous les degrés de vitesse qu'elle lui avoit donnés pendant qu'il descendoit. Ainsi le pendule montera à la même hauteur dont il est descendu, et il décrira l'arc Ap' dans le même temps qu'il a décrit l'arc PA.

PROPOSITION II. THÉORÊME.

402. LES *oscillations d'un pendule simple*, *qui décrit de très petits arcs de cercle*, *sont sensiblement* isochrones *entre elles*, *c'est-à-dire de même durée*.

Supposons que le pendule P, partant successivement des points P et p, où il est en repos au premier instant, décrive les arcs Pp', $p\varpi$; je dis qu'il décrira ces arcs ou leurs moitiés PA, pA', dans le même temps. Car, si on représente le poids du pendule par les petites verticales égales PN, pn, et qu'on décompose ces forces chacune en deux autres PO, PM, po, pm, dont les unes PO, po, soient dirigées suivant le rayon, et les autres PM, pm, soient tangentes à l'arc; il est clair que les premieres sont détruites par la résistance du fil, et que le pendule est mu seulement en vertu des forces PM, pm. Or, puisque les arcs PA, pA, sont très petits, les triangles PCA, pCA, peuvent passer pour rectilignes; et, comme ces triangles sont semblables chacun à chacun des triangles PNM, pnm, on aura, $PM = PN \times \frac{PA}{CA}$, $pm = pn \times \frac{pA}{CA}$. Donc $PM : pm :: PN \times \frac{PA}{CA} : pn \times \frac{pA}{CA} :: PN \times PA : pn \times pA :: PA : pA$, à cause de $pn = PN$. Ainsi les forces PM, pm, qui poussent le pendule, sont proportionnelles aux espaces qui doivent être parcourus. La même proportion a lieu, quelles que soient les situations du poids sur les arcs PA, pA. Imaginons que ces arcs soient partagés en un même nombre infini d'éléments correspondants chacun à chacun; il est clair que les forces qui font parcourir au même corps deux éléments correspondants seront proportionnelles à ces éléments : donc (337) ces deux mêmes éléments sont parcourus en temps égaux, et par conséquent les espaces PA, pA, sont aussi parcourus en temps égaux, de même que les arcs entiers Pp', $p\varpi$.

Proposition III. Théorême.

403. Les *durées des oscillations de deux pendules simples de longueurs différentes sont entre elles comme les racines quarrées de ces longueurs.*

Il est clair que la proportion sera démontrée en général,

si l'on fait voir seulement qu'elle est vraie, lorsque les petits arcs décrits par les deux pendules sont semblables entre eux, puisque les oscillations de chaque pendule en particulier sont isochrones, quels que puissent être les arcs décrits, pourvu qu'ils soient toujours fort petits.

Soient donc (Fig. 177 et 178) PA, QM, les petits arcs semblables décrits par les deux pendules P et Q jusqu'aux verticales CA, EM. Nommons F et f respectivement les forces qui poussent les deux corps P et Q, tangentiellement aux arcs qu'ils décrivent. Il est clair, par l'article précédent, qu'on aura la proportion, $F : f :: P \times \frac{PA}{CA} ; Q \times \frac{QM}{EM}$: laquelle devient $F : f :: P : Q$, à cause des arcs semblables PA, QM, qui donnent $\frac{PA}{CA} = \frac{QM}{EM}$. Ainsi les forces F et f sont proportionnelles aux poids des deux corps. Concevons que les espaces PA, QM, soient partagés en un même nombre infini d'éléments correspondants chacun à chacun. On pourra regarder deux éléments correspondants comme deux plans inclinés semblables, qui seroient parcourus suivant la même loi que deux plans inclinés ordinaires, aussi semblables, puisque les forces qui font parcourir nos deux éléments sont entre elles dans la même raison que seroient les deux forces destinées à faire parcourir les deux derniers plans inclinés. Donc (335) les temps employés à parcourir ces deux mêmes éléments sont entre eux comme les racines quarrées de leurs longueurs, ou comme les racines quarrées des rayons CA, EM; par conséquent, les temps employés à parcourir les arcs PA, QM, et les temps employés à parcourir les arcs PAp', QMq, qui répondent à des oscillations entieres, sont aussi entre eux dans le même rapport.

COROLLAIRE.

404. On voit par-là que lorsqu'on connoîtra la durée d'une oscillation d'un pendule simple de longueur donnée,

on connoîtra par une simple proportion la durée d'une oscillation d'un autre pendule dont la longueur sera donnée, ou la longueur de ce pendule, lorsque la durée de l'une de ses oscillations sera donnée. Or l'expérience apprend qu'un pendule simple, qui a 3 pieds 8 ½ lignes de longueur depuis le point de suspension jusqu'au centre de la balle, fait une oscillation en une seconde, ou en deux demi-secondes. Voici, d'après cette expérience, une table qui marque les longueurs que les pendules doivent avoir pour que chacune de leurs oscillations simples dure un certain nombre de demi-secondes, depuis 1 jusqu'à 32. On pourra pousser plus loin cette table, si on le juge à propos.

Durées des oscillations.	Longueurs des pendules.			Durées des oscillations.	Longueurs des pendules.		
Demi-secondes.	Pieds.	pou.	lig.	Demi secondes.	Pieds.	pou.	lig.
1	0	9	2½	17	221	0	0
2	3	0	8½	18	247	9	0
3	6	10	7	19	276	1	0
4	12	2	10	20	305	11	0
5	19	1	5	21	337	3	0
6	27	6	4	22	370	2	0
7	37	5	9	23	404	7	0
8	48	11	4	24	440	5	0
9	61	11	4	25	477	11	0
10	76	5	9	26	517	0	0
11	92	6	6	27	557	6	0
12	110	1	4	28	599	7	0
13	129	4	0	29	643	2	0
14	149	11	0	30	689	1	0
15	172	3	0	31	734	11	0
16	195	9	0	32	783	1	0

Proposition IV. Théorème.

405. Déterminer *la longueur* EQ (Fig. 178) *d'un pendule simple, qui fasse ses oscillations dans le même temps qu'un pendule composé, c'est-à-dire qu'un systême de corps* A, B, C (Fig. 179), *liés entre eux par des verges inflexibles sans pesanteur, ou attachés solidement à un plan matériel sans pesanteur et sans inertie, qui oscille autour du point fixe* O.

Considérons d'abord chacun des corps A, B, C, comme s'il étoit seul; et décomposons sa pesanteur en deux forces, l'une dirigée suivant la verge à laquelle il est appliqué, l'autre perpendiculaire à la même verge. Il est clair que les forces de la premiere espece sont détruites par la résistance du point O, et que celles de la seconde, que je représente par Aa, Bb, Cc, sont les seules qui feroient osciller les corps. Je mene la verticale OK, et je nomme g la gravité, c'est-à-dire l'espace que la pesanteur feroit parcourir en un instant à un corps tombant librement; 1, le sinus total; m, le sinus de l'angle AOK; n, le sinus de l'angle BOK; q, le sinus de l'angle COK. Les forces Aa, Bb, Cc, étant supposées de même nature que la gravité g, on aura,

$$Aa = g \times \frac{m}{1} = gm, \ Bb = gn, \ Cc = gq.$$

Maintenant, comme les corps A, B, C, forment un même systême, et qu'ainsi aucun d'eux ne peut se mouvoir sans agir sur les autres, soit pour accélérer, soit pour retarder leurs mouvements, il y a nécessairement équilibre entre les mouvements perdus d'une part et les mouvements gagnés d'autre part. Je suppose que le corps A, qui auroit parcouru Aa s'il avoit été seul, parcoure simplement Ag, à cause de la réaction des autres corps; que le corps B, au lieu de parcourir Bb, parcoure Bh; que le corps C, au lieu de parcourir Cc, parcoure Ci. On voit que A $\times$ ga est la quantité de mouvement perdue par le corps A; que B $\times$ bh

est la quantité de mouvement gagnée par B; que $C \times ci$ est la quantité de mouvement gagnée par C. Or ces quantités de mouvement doivent être regardées comme des forces qui se font équilibre, en agissant aux extrémités des bras de levier OA, OB, OC. Par conséquent on a l'équation, (M) $A \times ga \times OA = B \times bh \times OB + C \times ci \times OC$.

Les corps A, B, C, conservant toujours entre eux la même position, les arcs Ag, Bh, Ci, sont évidemment semblables: donc, si l'on suppose $OA = a$, $Ob = b$, $OC = c$, $Ag = f$; on aura, $Bh = \frac{fb}{a}$; $Ci = \frac{fc}{a}$; $ga = gm - f$; $hb = \frac{fb}{a} - gn$; $ci = \frac{fc}{a} - gq$. Substituant pour ga, bh, ci, OA, OB, OC, leurs valeurs dans l'équation (M), elle deviendra, $A(gm - f)\,a = B\left(\frac{fb}{a} - gn\right)b + C\left(\frac{fc}{a} - gq\right)c$; d'où l'on tire, $f = \frac{g(mAa^2 + nBab + qCac)}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}$.

Soit H le centre de gravité du système; et des points A, B, C, H, menons perpendiculairement à OK les droites AV, BE, CK, HD; on aura, par la propriété du centre de gravité, $A \times AV + B \times BE + C \times CK = (A + B + C) \times HD$. Mais $AV = ma$, $BE = nb$, $CK = qc$, $HD = rh$, en nommant h la droite OH, r le sinus de l'angle HOK; donc $Ama + Bnb + Cqc = (A + B + C)rh$, et par conséquent $f = gr \times \frac{ah(A + B + C)}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}$.

Nous voyons, par cette expression de la force accélératrice simple f du corps A, que si l'on fait l'angle QEM du pendule simple (Fig. 178), égal à l'angle HOK du pendule composé (Fig 179); nous voyons, dis-je, qu'en décomposant les arcs semblables décrits par les points Q et A, en un même nombre d'éléments correspondants chacun à chacun, deux éléments correspondants seront parcourus en temps égaux, et par conséquent les arcs entiers seront aussi parcourus en temps égaux, si la force accélératrice simple du point Q, qui est gr, et celle du point A, qui est f, sont

entre elles comme les arcs, ou comme les rayons EQ, OA. La durée égale de mouvements, ou le *synchronisme* du pendule simple et du pendule composé est donc fondé sur la proportion, $gr : \frac{grah\,(A+B+C)}{Aa^2+Bb^2+Cc^2} :: EQ : a$; ce qui donne, $EQ = \frac{Aa^2+Bb^2+Cc^2}{(A+B+C)h}$.

Ainsi, *pour avoir l'expression de la longueur du pendule simple, qui fait ses oscillations dans le même temps que le pendule composé, il faut multiplier chaque corps du pendule composé, par le quarré de sa distance à l'axe de rotation; ajouter ensemble tous ces produits; et diviser la somme par le produit de la somme de tous les corps, multipliée par la distance du centre de gravité du systême à l'axe de rotation.*

On observera que les deux angles QEM, HOK, doivent être fort petits, si l'on veut que non seulement les oscillations correspondantes, ou de même amplitude, des deux pendules, soient de même durée, mais encore que les oscillations soient, au moins sensiblement, de même durée, quoique les amplitudes soient différentes.

Nous observerons encore que si les verges ou les liens qui retiennent les corps du systême avoient de la pesanteur ou de l'inertie, on pourroit les décomposer en une infinité de petits corps, qu'on regarderoit comme formant un même systême auquel on appliqueroit la regle précédente, qui est absolument générale, quel que soit le nombre de corps élémentaires du pendule composé.

COROLLAIRE.

406. Si l'on porte la longueur EQ (Fig. 178) de O en t, (Fig. 179), le point t sera ce qu'on appelle *le centre d'oscillation* du pendule composé. Ce point peut être regardé comme chargé de tous les corps qui composent le systême; et il fait ses oscillations de la même maniere et dans le

même temps que le pendule simple, dont EQ ou Ot est la longueur.

On doit remarquer que le point t est différent du centre de gravité H, et que Ot > OH, ce qu'on démontrera, en comparant l'expression de Ot avec celle de OH.

PROPOSITION V. PROBLÊME.

407. DÉTERMINER *le centre de percussion d'un systême de corps liés entre eux par des verges inflexibles sans pesanteur, qui oscille autour d'un axe fixe.*

On appelle *centre de percussion* un point dans lequel la masse d'un systême de corps A, B, C (Fig. 180) (qu'il faut regarder comme attachés solidement, à des distances invariables les uns des autres, sur un plan matériel sans pesanteur et sans inertie, mobile autour de l'axe O), étant supposée réunie, et agissant perpendiculairement à l'extrémité d'un levier égal à la distance de ce point à l'axe O, donneroit le plus grand coup possible à un obstacle qu'on lui opposeroit.

Il est d'abord évident que le centre de percussion est placé dans la direction de la résultante des mouvements de rotation de tous les corps A, B, C. Ainsi il s'agit de trouver la position et la quantité de cette résultante.

Les corps A, B, C, étant forcés de se mouvoir tous à la fois par une cause quelconque, prennent des vîtesses proportionnelles à leurs distances AO, BO, CO, à l'axe de rotation. Par conséquent leurs quantités de mouvements, ou les forces qui les animent, peuvent être exprimées respectivement par les produits A × AO, B × BO, C × CO, et ces forces agissent suivant les droites AN, BN, CN'; perpendiculaires aux distances OA, OB, OC. Soit N le point de concours de AN et de BN ; je mene la droite ON, sur laquelle, comme diametre, je décris une demi-circonférence de cercle, qui passera par les points A et B, puisque les angles OAN, OBN, sont droits. Le point N étant nécessairement un de ceux par où passe la direction de la

résultante des deux forces $A \times AO$, $B \times BO$, je suppose que ZN soit cette direction; du point Z où elle coupe la demi-circonférence OABN, au point O, je mene la droite ZO, qui rencontre en H la droite AB, qui joint les deux corps A et B. Cela posé, on voit (39) que les deux forces $A \times AO$, $B \times BO$ sont entre elles comme les sinus des angles BNZ, ANZ, ou des angles BOZ, AOZ; on aura donc, $A \times AO : B \times BO :: \sin. BOZ : \sin. AOZ$. Or, si des points A et B on abaisse sur OZ les perpendiculaires AR, BS, et qu'on nomme 1 le sinus total, on a $\sin. BOZ = \frac{BS}{BO}$, $\sin. AOZ = \frac{AR}{AO}$; donc on aura, $A \times AO : B \times BO :: \frac{BS}{BO} : \frac{AR}{AO}$, ou bien (à cause des triangles semblables BHS, AHR), $A \times AO : B \times BO :: \frac{BH}{BO} : \frac{AH}{OA}$; ce qui donne $A \times AH = B \times BH$, et fait voir que le point H est le centre de gravité des deux corps A et B. La résultante des deux forces $A \times AO$, $B \times BO$, est donc perpendiculaire à la droite OHZ menée par le point O, et par le centre de gravité du système particulier des deux corps A et B. De plus, en nommant Z cette résultante, on a, (39), $Z : B \times OB :: \sin. ANB : \sin. ANZ :: \sin. AOB : \sin. AOZ$, ou bien (en abaissant des points B et H les perpendiculaires BX, HV sur OA prolongée) $:: \frac{BX}{BO} : \frac{HV}{OH}$, ou bien (à cause des triangles semblables, RAX, HAV) $:: \frac{AB}{BO} : \frac{AH}{HO}$, ou bien) à cause que le point H est le centre de gravité des deux corps A et B) $:: \frac{A+B}{BO} : \frac{B}{OH}$; d'où l'on tire, en concluant du premier rapport au dernier, $Z = (A + B) \times OH$. Connoissant Z, on trouvera OZ, en observant que si l'on considere les moments par rapport au point O, le moment de la résultante Z doit être égal à la somme des moments de ses deux forces composantes, $A \times AO$, $B \times BO$; ce qui donne, $(A + B) \times OH \times OZ = (A \times AO) \times AO + (B \times BO) \times BO$; et par conséquent $OZ = \frac{A \times (AO)^2 + B \times (BO)^2}{(A+B) \times HO}$.

Voilà donc d'abord la formule pour déterminer le centre Z de percussion du système des deux corps A et B.

Soit N' le point de concours de la force Z et de la force C × CO du corps C ; ce point est nécessairement placé dans la direction de la résultante de ces deux forces, direction que je suppose être Z' N'. Je mene la droite ON' sur laquelle, comme diametre, je décris une demi-circonférence de cercle, qui passera par les points Z et C, puisque les angles OZN', OCN', sont droits. Ayant tiré la droite CH ; du point Z où Z' N' rencontre la demi-circonférence OZCN', je mene au point O la droite Z'O, qui rencontre CH en H'. Cela posé, on aura, Z : C × CO : : sin. CN'Z' : sin. ZN'Z' : : sin. COZ' : sin. ZOZ', ou bien (en abaissant des points C et H les perpendiculaires CS', HR', sur OZ') : : $\frac{CS'}{CO}:\frac{HR'}{OH}::\frac{CH'}{CO}:\frac{HH'}{OH}$; ce qui donne, en concluant du premier rapport au dernier, $\frac{Z\times HH'}{OH} = C \times CH'$, ou $(A + B) \times HH' = C \times CH'$, et ce qui fait voir que le point H' est le centre de gravité du système des trois corps A, B, C. Ainsi la résultante des deux forces Z et C × CO, ou des trois forces A × AO, B × BO, C × CO, est perpendiculaire à la droite OZ' menée par le point O et par le centre de gravité H' du système des trois corps A, B, C. Soit nommée Z' cette même résultante ; on aura, Z' : C × CO : : sin. ZN'C : sin. ZN'Z' : : sin. ZOC : sin. ZOZ', ou bien (en abaissant des points C et H' les perpendiculaires CX', H'V', sur OZ prolongée) . : $\frac{CX'}{CO}:\frac{H'V'}{OH'}$, ou bien (à cause des triangles semblables HCX', HH'V') : : $\frac{CH}{CO}:\frac{HH'}{OH}$, ou bien (à cause que le point H' est le centre de gravité du système des trois corps A, B, C) : : $\frac{A+B+C}{CO}:\frac{C}{OH'}$; donc, en concluant du premier rapport au dernier, $Z' = OH' \times (A + B + C)$. Connoissant Z', on connoîtra OZ', par la considération que le moment de la résultante Z', relativement au point O, doit être égal à la somme des mo-

ments des trois forces composantes $A \times AO, B \times BO, C \times CO$, relativement au même point ; considération qui donne, $(A+B+C) \times OH' \times Z'O = (A \times AO) \times AO + (B \times BO) \times BO + (C \times CO) \times CO$; et par conséquent $Z'O = \frac{A \times (AO)^2 + B \times (BO)^2 + C \times (CO)^2}{(A+B+C) \times OH'}$.

Il est clair que la même méthode est applicable à un système composé de tant de corps qu'on voudra, et qu'on trouvera toujours des résultats analogues aux précédents; en sorte qu'on peut conclure en général, 1°. que *le centre de percussion d'un systéme quelconque de corps est placé sur la droite menée par le centre de rotation et par le centre de gravité du systéme;* 2°. que *la distance du centre de percussion au centre de rotation est égale au quotient qui résulte en divisant la somme des produits des corps multipliés chacun par le quarré de sa distance à l'axe de rotation, par la somme de tous les corps, multipliée par la distance du centre de gravité du systéme à l'axe de rotation.*

On voit que le centre de percussion et le centre d'oscillation se confondent, puisqu'ils sont placés à la même distance de l'axe de rotation.

CHAPITRE IV.

Solution de divers Problémes de Dynamique.

---

408. Les problêmes que je rassemble ici sous un même titre, sont la plupart indépendants les uns des autres. Mon objet est de continuer à exercer le lecteur, par des exemples variés, à la détermination des mouvements que les corps d'un systême sont forcés de prendre par leurs oppositions

mutuelles. Ces nouveaux problêmes, joints à ceux qui précedent, feront connoître de plus en plus comment on doit s'y prendre pour traiter les questions de dynamique. A mesure qu'on avancera, les principes acquerront un nouveau jour, et on verra que toutes les difficultés attachées à ces recherches ne peuvent jamais dépendre que de la géométrie ou de l'analyse.

Proposition I. Problême.

409. Un *corps* A (Fig. 181) *sans pesanteur, ou dont la pesanteur est soutenue, soit par un fluide, ou par une table horizontale, ou de toute autre maniere, étant attaché fixement en* A *au levier* ACF *parfaitement mobile autour du point ou pivot fixe* C ; *trouver la vitesse qu'une force constante, appliquée perpendiculairement en* F *au levier, imprimera à ce corps en un temps donné.*

Ayant nommé F la force qui tend à faire tourner le levier, Q la masse à mouvoir (en comprenant dans cette masse celle du levier, s'il est nécessaire) ; il est évident que le moment de la force F, qui est F × CF, doit être égal au moment du mouvement gagné par la masse Q autour de l'axe C. Or, si l'on suppose que, dans un instant, le levier passe de la situation FCA dans la situation fCa, en sorte qu'un point quelconque A du corps proposé décrive le petit arc Aa ; et que, raisonnant ici comme on a fait dans l'article 393 pour trouver le moment du mouvement gagné par le corps G autour de l'axe GV (Fig. 174), on nomme S (1) la somme des produits des molécules du corps Q par les quarrés de leurs

(1) La quantité S se détermine géométriquement comme on l'a indiqué (396) ; mais, dans la pratique, on peut se contenter de partager la masse Q en plusieurs parties assez petites pour qu'elles puissent être regardées sensiblement comme des points ; de multiplier ensuite chacune d'elles par le quarré de sa distance à l'axe C ; et enfin d'ajouter ensemble tous ces produits.

distances à l'axe C : il est clair que le moment du mouvement gagné par le corps Q autour de l'axe C sera exprimé par $S \times \frac{Aa}{CA}$. Ainsi on aura l'équation, $F \times CF = S \times \frac{Aa}{CA}$, ou bien $Aa = \frac{F \times CF \times CA}{S}$.

Maintenant, supposons que la force F soit égale à un poids dont la masse $= N$, et nommons g la gravité naturelle : on aura, $F = gN$; car tout poids est égal au produit de sa masse par la pesanteur (303). De plus, en supposant que le petit espace Aa ait été parcouru dans un instant égal à celui que la gravité g emploie à faire parcourir à un corps qui tombe librement un petit espace, qu'on peut exprimer par la même lettre g : il est évident que Aa pourra être regardé aussi comme l'expression de la force accélératrice qui anime le point A (315, Form. F). Donc, si l'on fait cette force accélératrice $= f$, $CA = a$, $CF = c$, on aura, $f = \frac{gNac}{S}$. Par où l'on voit que le mouvement du point A est uniformément accéléré, puisque la force accélératrice f est à la gravité naturelle g dans le rapport constant de Nac à S, et que par conséquent cette même force f est constante. On voit encore, par la formule (F) de l'art. 315, que si l'on multiplie les espaces déterminés dans les deux tables de l'article 329, par la fraction $\frac{NaC}{S}$, les produits seront les espaces parcourus par le point A, suivant les conditions énoncées pour les deux tables dont il s'agit.

Proposition II. Problème.

410. Supposons *maintenant* (Fig. 182) *que la masse* Q *à mouvoir soit livrée à l'action de la pesanteur, de maniere que le levier* FCA *tourne dans un plan vertical autour de l'axe fixe* C : *on demande la vitesse que la force* F, *toujours appliquée perpendiculairement en* F, *communiquera à tout le systéme.*

Soit A le centre de gravité de toute la masse Q à mouvoir. Par le point fixe C et par le point A, soit imaginée la ligne FCA faisant, avec la verticale CO, l'angle quelconque ACO. Qu'on prenne la verticale AN pour représenter le poids absolu du corps Q, et soit décomposée cette force en deux autres, l'une AR dirigée suivant CA, l'autre AM perpendiculaire à CA. Il est évident que la premiere force AR est détruite par la résistance du point C, et que la seconde AM est la seule qui tende à faire tourner le levier et à le rapprocher de la verticale CO. Supposons que, dans un instant, le levier passe de la situation FCA dans la situation fCa, en sorte que le point A décrive le petit arc Aa. Cela posé, imaginons que la force F est partagée en deux autres X et Y, dont la premiere X feroit sans cesse équilibre à la force AM, et dont la seconde Y est employée à mouvoir autour du point fixe C la masse Q considérée comme non pésante. Il est clair qu'on aura d'abord l'équation, (A) $X.CF = AM.CA$.

De plus, en nommant S la somme des produits des molécules du corps Q par les quarrés de leurs distances à l'axe C, on aura, par l'article précédent, (B) $Y \times CF = S \times \frac{Aa}{CA}$.

Soient {
- la gravité naturelle . . . . g,
- la force accélératrice Aa du point A . . . f,
- la force motrice F, égale à un poids connu, dont la masse est N . . . . gN,
- CA . . . . a,
- CF . . . . c;
- le sinus total 1,
- le sinus de l'angle ACO . . . . q.

On voit sans peine que la force $AM = gQ \times \frac{q}{1} = qgQ$. Par conséquent les deux équations (A) et (B) deviendront $c.X = qgQa$; $c.Y = \frac{Sf}{a}$. D'où l'on tire, $X + Y = \frac{qgQa}{c} + \frac{Sf}{ca}$. Mais $X + Y = gN$. Donc $gN = \frac{qgQa}{c} + \frac{Sf}{ca}$, et $f =$

$\frac{g(caN - qaaQ)}{S}$. Telle est l'expression de la force accélératrice f du point A. Comme le numérateur de cette fraction renferme le sinus q de l'angle ACO, qui varie à mesure que le levier tourne, on voit qu'en supposant toutes les autres quantités constantes, la force accélératrice f n'est pas constante, et que par conséquent le mouvement de rotation du levier n'est pas uniformément accéléré.

REMARQUE.

411. Si, au lieu de la force F, il y a en F un poids quelconque attaché fixement au levier, de maniere que tout le système tourne librement sur le point C, et que tout étant d'ailleurs le même que dans l'article précédent, on nomme de plus H la masse du nouveau poids; S′ la somme des produits des particules de H par les quarrés de leurs distances au point C; n (1) le sinus de l'angle que la droite FC, tirée du centre de gravité de H au point C, fait avec la verticale : on trouvera en un moment par la même méthode, $f = \frac{g.(ancH - qa^2Q)}{S + S'}$; d'où il est aisé de juger en quel sens tournera le levier, suivant la relation qu'on supposera entre les quantités H, Q, a, c, n, q.

De là on peut tirer facilement une nouvelle solution très simple du problême des centres d'oscillation ou de percussion.

PROPOSITION III. PROBLÊME.

412. Deux *corps inégaux* P *et* Q (Fig. 183) *étant attachés aux extrémités d'une corde* PRQ *non pesante, qui passe*

(1) Je prends une nouvelle lettre n pour exprimer le sinus de l'angle dont il s'agit, parcequ'il peut se faire que les points A, C, F, ne soient pas en ligne droite, et que par conséquent n differe de q.

sur une poulie suspendue fixement et mobile sur son aissieu: on demande la vîtesse avec laquelle le plus grand P *descendra, et fera monter le plus petit* Q.

Il est visible que ce problême peut se résoudre par une méthode analogue à celle que j'ai employée dans les deux articles précédents; savoir, en décomposant le poids moteur P en deux autres, dont l'un fasse simplement équilibre au poids Q, et dont l'autre soit employé à mouvoir la masse totale P + Q du système, considérée comme non pesante. Mais voici un autre usage un peu plus direct du principe de la communication des mouvements. La même chose doit s'entendre pour les problêmes suivants, *mutatis mutandis.*

Supposons que les deux corps P et Q, s'ils avoient été libres, eussent parcouru en un instant, par leur pesanteur naturelle, les espaces égaux PN, QK; mais qu'à cause de l'action et de la réaction qu'ils exercent l'un sur l'autre, P parcoure PM en descendant, et Q parcoure QH = PM en montant. Il est évident que MN sera la vîtesse perdue par le corps P dans l'instant proposé, et que KH sera la vîtesse gagnée par le corps Q en montant, pendant le même instant. Or il doit y avoir égalité entre le mouvement perdu par le corps P et le mouvement gagné par le corps Q; ainsi on aura l'équation, $P \times MN = Q \times KH$.

Les petits espaces PN, PM ou QH, parcourus en vertu de la gravité naturelle et en vertu de la force accélératrice qui anime maintenant chacun des points des masses P et Q, peuvent être regardés comme les expressions mêmes de ces forces. Ainsi, en nommant g la gravité PN, f la force actuelle PM ou QH, l'équation précédente deviendra, $P(g-f) = Q(g+f)$; d'où l'on tire, $f = \frac{g(P-Q)}{P+Q}$.

Cette équation fait voir que la force accélératrice simple de chacun des deux corps proposés est à la gravité naturelle g, dans le rapport constant de $(P-Q)$ à $(P+Q)$. D'où il résulte que les mouvements des deux corps proposés sont uniformément accélérés, et qu'en multipliant les espaces

déterminés dans les deux tables de l'article 329, par la fraction $\frac{P-Q}{P+Q}$, les produits seront les espaces parcourus par le corps P en descendant, et par le corps Q en montant, suivant les conditions des temps énoncées dans l'article cité.

REMARQUE.

413. Un agent appliqué à une machine, par exemple, un homme, un cheval, n'exerce pas toujours contre elle toute la force dont il est capable. Il peut en conserver une partie, qui sert alors à son propre mouvement; tandis que l'autre partie est employée à mouvoir la machine. Notre grand poids P peut représenter toute la force absolue de l'agent, et le poids Q la résistance de la machine ou le fardeau qu'il faut élever. Alors la dépense de force que fait l'agent pour élever le fardeau malgré sa pesanteur, est exprimée par $P(g-f)$ ou $\frac{2gPQ}{P+Q}$ (1); et ce qui reste de force au même agent est exprimé par Pf ou $\frac{gP(P-Q)}{P+Q}$.

COROLLAIRE I.

414. Il est évident que la partie CP de la corde est tendue avec une force exprimée par $P(g-f)$ ou $\frac{2gPQ}{P+Q}$, et que la partie BQ est tendue avec une force exprimée par $Q(g+f)$ ou $\frac{2gPQ}{P+Q}$. Ces deux forces égales produisent sur les appuis de la poulie une pression verticale égale à leur somme, et

(1) Ces sortes d'expressions $\frac{gPQ}{P+Q}$, $\frac{gP(P-Q)}{P+Q}$, gP, représentent des poids; car la lettre g représente la pesanteur, et les lettres P, Q, des masses; or le poids est le produit de la masse par la pesanteur: donc, etc.

qui est par conséquent représentée par $\frac{4gPQ}{P+Q}$. Ainsi on connoît la résistance dont la corde doit être capable, et la charge que soutient l'appui qui porte la poulie.

On peut remarquer, au sujet de cette charge, qu'elle est moindre que la somme des deux poids P et Q; au lieu que dans le simple état d'équilibre elle est toujours égale à la somme des poids, ou au double de l'un d'eux.

Corollaire II.

415. Nommons V la vitesse finale d'un corps grave qui tombe librement par un certain espace; u la vitesse finale de chacun de nos deux corps par le même espace: en appliquant ici la formule (G) de l'article 315, et faisant $e = E$, on aura, $VV : uu :: g : f :: g : \frac{g(P-Q)}{P+Q} :: P+Q : P-Q$. D'où l'on tire, $P.u^2 + Q.u^2 = P.V^2 - Q.V^2$, c'est-à-dire que la somme des produits des deux corps par les quarrés de leurs vitesses forcées, est égale à la différence entre la somme des produits des corps par les quarrés des vitesses qu'ils auroient acquises par leurs pesanteurs, s'ils s'étoient mus librement. Je dis *la différence*, parceque nos deux corps vont en sens contraires, ou que l'un monte pendant que l'autre descend.

Cette égalité est la conservation des forces vives. On trouve en général que les forces vives se conservent dans les mouvements qui résultent d'un choc immédiat, pourvu que les corps soient parfaitement élastiques, ou de l'action de corps qui se tirent par des fils, des leviers, ou de toute autre maniere. Nous avons vu un exemple du premier genre dans le choc direct des corps parfaitement élastiques (380). Le problême précédent offre un autre exemple de la même loi pour les corps soumis à des forces accélératrices. Nous nous dispenserons de la faire remarquer dans les autres problêmes où elle peut avoir également lieu, parce-

qu'elle n'est au fond qu'une conséquence secondaire du principe général de la communication des mouvements ; conséquence que les lecteurs pourront tirer eux-mêmes dans chaque cas particulier.

Proposition IV. Problème.

416. Tout *étant d'ailleurs le même que dans le problême précédent, on demande qu'on ait égard de plus à l'inertie de la poulie.*

Puisque la poulie est suspendue fixement par son centre, elle n'a par elle-même aucune tendance à tourner plutôt à droite qu'à gauche, et elle tournera toujours dans le sens du poids prépondérant P. De plus, il est clair que le moment du mouvement perdu par le corps P, autour du centre de la poulie, doit être égal à la somme des moments des mouvements gagnés par le corps Q et par la masse de la poulie, autour du même point. Or, si l'on nomme g la gravité naturelle, f la force accélératrice simple de chacun des points des masses P et Q, b le rayon de la poulie, S la somme des produits des molécules de la poulie par les quarrés de leurs distances au centre : il est visible que le moment du mouvement perdu par le corps P est $P(g-f)\,b$; que le moment du mouvement gagné par le corps Q est $Q(g+f)\,b$; et que le moment du mouvement gagné par la poulie est $S \times \frac{f}{b}$, puisque tous les points de la circonférence tournent avec la même vîtesse que descend le corps P ou que monte le corps Q. Ainsi on aura l'équation,

$$P(g-f)\,b = Q(g+f)\,b + \frac{Sf}{b};$$ d'où l'on tire,

$$f = \frac{g(Pbb - Qbb)}{Pbb + Qbb + S}.$$

La force accélératrice f est donc à la gravité g, dans le rapport constant de $(Pbb - Qbb)$ à $(Pbb + Qbb + S)$; et par conséquent on connoîtra, par les tables de l'art. 329,

les espaces que les corps P et Q parcourent en un temps donné.

Corollaire.

417. Les deux cordons CP, BQ, sont visiblement tendus avec la même force; et, comme la tension de CP est toujours égale au mouvement perdu par le corps P, c'est-à-dire à $P(g-f)$; il s'ensuit qu'en mettant pour f sa valeur, chacune des deux tensions proposées sera représentée par la quantité $\frac{gP(2Qbb+S)}{Pbb+Qbb+S}$. Ces deux forces égales produisent sur le centre, ou sur les appuis de la poulie, une pression représentée par $\frac{2gP(2Qbb+S)}{Pbb+Qbb+S}$.

A cette pression il faut ajouter le poids de la poulie, pour avoir l'effort total que supporte l'aissieu.

Remarque I.

418. Si on vouloit déterminer directement la tension de BQ, on considéreroit que cette force est égale à la somme du mouvement gagné par le corps Q, et du mouvement gagné par la masse de la poulie, dans le sens QB; car la machine se meut exactement de la même maniere que si à la place de la masse de la poulie on attachoit fixement en un point quelconque de BQ une masse non pesante qui opposât au mouvement la même résistance qu'oppose la masse de la poulie. Or, dans ce second cas, la tension de BQ est égale au mouvement gagné par le corps Q, plus au mouvement gagné par la nouvelle masse, en sorte que si l'on nomme R cette même masse, on aura la tension de $BQ=Q(g+f)+Rf$. Mais, puisque la masse R et la masse de la poulie opposent la même résistance au mouvement autour du centre, on a, $R\times f\times b=S\times\frac{f}{b}$, ou

bien $R = \frac{S}{bb}$. Donc la tension de $BQ = Q(g+f) + \frac{Sf}{bb} = \frac{gP(2Qb^2+S)}{Pb^2+Qb^2+S}$.

Il est à propos de faire attention à cette remarque, pour évaluer sans peine les tensions des cordons, lorsque les forces qui les tendent n'ont pas les mêmes bras de levier par rapport au centre de mouvement. Ici tous les points de la masse de la poulie n'ont pas les mêmes bras de levier relativement au centre de cette même poulie.

REMARQUE II.

419. Nous avons regardé la corde comme non pesante. S'il falloit avoir égard à sa pesanteur, on trouveroit, toujours par la même méthode, l'expression de la force accélératrice du corps P ou Q, pour un instant quelconque; mais alors cette force seroit variable d'un instant à l'autre, et on ne pourroit déterminer la vîtesse de chaque mobile, après un temps donné, qu'à l'aide des formules générales du mouvement varié, qui supposent la connoissance du calcul intégral. Je me contente donc d'indiquer ce problême aux lecteurs versés dans ce calcul. Proposons-nous une autre question immédiatement résoluble par ce qui précede.

Je suppose que la corde soit non pesante, ou que si elle est pesante, elle le soit assez peu en comparaison des poids qui y sont attachés, pour qu'au moins, dans un temps court, les poids P et Q, dans lesquels je comprends maintenant les pesanteurs des parties de corde qui les soutiennent, puissent être regardés comme des quantités constantes. Il s'agit de déterminer la force accélératrice du corps P ou Q, en ayant égard non seulement à l'inertie de la poulie, comme dans le problême précédent, mais encore au frottement et à la roideur de la corde.

Nommons g la gravité naturelle; f la force accélératrice du corps P ou Q; a le rayon de l'aissieu de la poulie; b le

rayon de cette poulie, en y comprenant celui de la corde; S la somme des produits des molécules de la poulie par les quarrés de leurs distances au centre; n le rapport du frottement à la pression; c le rayon de la corde; et supposons qu'une corde, dont le rayon est h, sous une pression connue N, en se pliant autour d'un rouleau dont le rayon augmenté de celui de la corde est m, ait une roideur égale à un poids connu q.

Cela posé, il est clair que le moment du mouvement perdu par le corps P, autour du centre de la poulie, doit être égal à la somme faite du moment du mouvement gagné par le corps Q, du moment du mouvement gagné par la poulie, du moment du frottement, et du moment de la roideur de la corde, par rapport au même centre. Or,

1°. Le moment perdu par le corps $P = P(g-f)$; et le moment de ce mouvement $= P(g-f)b$.

2°. Le mouvement gagné par le corps $Q = Q(g+f)$; et le moment de ce mouvement $= Q(g+f)b$.

3°. Le moment du mouvement gagné par la poulie $= \frac{Sf}{b}$.

4°. Puisque chaque cordon CP, BQ, est évidemment toujours tendu avec une force égale au mouvement perdu par le corps P, c'est-à-dire à $P(g-f)$, et que par conséquent la pression de l'aissieu sur la surface de son moyeu est $2P(g-f)$; il s'ensuit que le frottement, supposé proportionnel à la pression, sera exprimé par $2nP(g-f)$, et que le moment de cette force par rapport au centre sera $2nP(g-f)a$.

5°. La roideur de la corde aura pour valeur $\frac{2qmcP(g-f)}{Nbh}$ (278 et 279); et le moment de cette force sera représenté par $\frac{2qmcP(g-f)b}{Nbh}$, ou par $\frac{2qmcP(g-f)}{Nh}$. Par conséquent on aura l'équation, $P(g-f)b = Q(g+f)b + \frac{Sf}{b} + 2nP(g-f)a + \frac{2qmcP(g-f)}{Nh}$. D'où l'on tire (en faisant, pour

abréger, $\frac{qm}{Nh} = r$), $f = \frac{g(Pbb - Qbb - 2nabP - 2rbcP)}{Pbb + Qbb + S - 2nabP - 2rbcP}$.

Le rapport de la force accélératrice f à la gravité g étant donné par le moyen de cette équation, on aura aussi le rapport des espaces parcourus par nos deux corps aux espaces parcourus librement en vertu de la pesanteur.

La tension de chaque cordon se détermine en substituant pour f sa valeur, dans l'expression P $(g - f)$.

On fera entrer d'une maniere analogue la considération du frottement et de la roideur des cordes, dans les autres problémes de ce genre. Je me contente d'en avertir ; dans les problêmes suivants, je fais abstraction de ces deux résistances.

Proposition V. Problême.

420. Supposons (Fig. 184) *que le corps* P *descendant verticalement par sa pesanteur, entraîne après lui le corps* Q *le long du plan incliné* DB, *à l'aide d'une corde non pesante, qui passe sur une poulie fixée au sommet* B *du plan incliné, et dont la partie* OQ *est parallele à* BD : *on demande la vitesse des deux corps, en ayant égard à l'inertie de la poulie.*

Soient BC et CD la hauteur et la base du plan incliné BD. Supposons que si les deux corps P et Q eussent été libres, en un instant P eût parcouru la verticale PN par sa pesanteur naturelle, et Q eût parcouru QK par sa pesanteur relative ; mais qu'à cause de leur mouvement forcé, P parcoure PM, et Q parcoure QH. Nommons g la gravité naturelle PN ; f la force accélératrice simple du corps P ou Q ; b le rayon de la poulie ; h la hauteur BC du plan incliné ; l sa longueur ; S la somme des produits des molécules de la poulie par les quarrés de leurs distances au centre A. On aura, $MN = g - f$, $QK = \frac{gh}{l}$, $KH = f + \frac{gh}{l}$; le mouvement perdu par le corps $P = P \times MN = P(g - f)$, et

le moment de ce mouvement par rapport au centre de la poulie $= P(g-f)\,b$; le mouvement gagné par le corps Q $= Q \times KH = Q\left(f+\frac{gh}{l}\right)$, et le moment de ce mouvement $= Q\left(g+\frac{gh}{l}\right)b$; enfin le moment du mouvement gagné par la poulie $= \frac{Sf}{b}$. Et, comme le moment du mouvement perdu par le corps P doit être égal à la somme des moments des mouvements gagnés par le corps Q et par la poulie, on aura, $P(g-f)\,b = Q\left(f+\frac{gh}{l}\right)b + \frac{Sf}{b}$; d'où l'on tire, $f = \frac{g\left(Pbb - Qbb.\frac{h}{l}\right)}{Pbb+Qbb+S}$: équation qui donne la relation de la force f à la gravité g, et qui fait voir que cette relation est constante.

Corollaire.

421. Les deux cordons ZP, OQ, sont tendus chacun avec une force représentée par $P(g-f) = \frac{gP\left(Qbb + Qbb.\frac{h}{l}+S\right)}{Pbb+Qbb+S}$. Mais la tension du cordon ZP est dirigée parallèlement à BC, et celle du cordon OQ, parallèlement à BD. Pour déterminer la pression que ces deux forces produisent sur le centre A de la poulie, qu'on les représente par les droites AE, AG, égales entre elles et paralleles respectivement à BC et à BD : la pression demandée sera représentée par la diagonale AF. Soit m l'angle GAE; l'expression analytique de AF sera évidemment . . . .

$$\frac{gP\left(Qbb + Qbb.\frac{h}{l}+S\right)}{Pbb+Qbb+S} \times \frac{\sin. m}{\sin. \frac{1}{2} m}.$$

A l'égard de la pression contre le plan incliné BD, elle est toujours $gQ \times \frac{CD}{BD}$, la même que s'il n'y avoit pas de mouvement.

PROPOSITION VI. PROBLÈME.

422. DEUX *corps* P *et* Q (Fig. 185) *étant attachés aux extrémités de deux cordes qui se roulent sur deux poulies ou roues concentriques, mais de rayons différents; et supposant que* P *descende et fasse monter* Q : *on demande les vitesses des deux corps, en ayant égard à l'inertie des roues.*

Comme les deux roues BVE, XDC, quoiqu'enfilées par un même axe, peuvent n'être pas dans un même plan, et avoir chacune leurs masses particulieres, nous désignerons par les deux lettres S et s la somme des produits des molécules de chaque masse par les quarrés de leurs distances à l'axe. Lorsque la petite roue fera partie de la grande, on ne tiendra pas compte de s, puisque cette quantité sera alors comprise dans S.

Je suppose que les deux corps P et Q, s'ils avoient été libres, eussent parcouru en un instant, en vertu de leur pesanteur naturelle, les espaces égaux PN, QK; mais qu'à cause de leur mouvement forcé, P parcoure PM en descendant, et Q parcoure QH en montant. Soient menés les rayons AB, AC, des deux roues. Nommons g la gravité naturelle PN ou QK; p la force accélératrice simple du corps P; q la force accélératrice simple du corps Q; a le rayon CA de la petite roue; b le rayon AB de la grande roue. On aura, $MN = g - p$; $KH = g + q$; le mouvement perdu par le corps $P = P \times MN = P(g - p)$, et le moment de ce mouvement $= P(g - p)b$; le mouvement gagné par le corps $Q = Q \times KH = Q)g + q)$, et le moment de ce mouvement $= Q(g + q)a$; le moment du mouvement gagné par la roue $BVE = S \times \frac{p}{b}$; le moment du mouvement gagné par la roue $XDC = s \times \frac{q}{a}$. Or le moment du mouvement perdu par le corps P doit être égal à la somme des moments de tous les mouvements gagnés.

Ainsi on aura l'équation . . . .

$P(g-p)b = Q(g+q)a + \frac{Sp}{b} + \frac{sq}{a}$.

D'où l'on tire (en observant que $p:q::b:a$, et par conséquent $pa = qb$),

$$p = \frac{g(Pbb - Qab)}{Pbb + Qaa + S + s};$$

$$q = \frac{g(Pab - Qaa)}{Pbb + Qaa + S + s}.$$

On a donc les rapports des deux forces accélératrices p et q à la gravité g; et par conséquent on connoîtra aussi les espaces parcourus par nos deux corps dans un temps donné.

COROLLAIRE.

423. Le cordon BP est tendu avec une force égale au mouvement perdu par le corps P, et qui est par conséquent exprimée par $P(g-p) = \frac{gP(Qaa + Qab + S + s)}{Pbb + Qaa + S + s}$.

La tension du cordon CQ se détermine ainsi par la méthode de l'article 418. Imaginons une masse R non pesante, attachée fixement en un point du cordon CQ, et opposant par son inertie la même résistance au mouvement de la machine, que lui opposent les deux roues, aussi par leurs inerties. Il est clair que la tension du cordon CQ sera égale à la somme des mouvements gagnés par les corps Q et R; elle sera donc exprimée par $Q(g+q) + Rq$. Or, puisque la masse R, animée de la vîtesse q, feroit équilibre aux inerties des roues, on a . . . .

$R \times q \times a = S \times \frac{p}{b} + s \times \frac{q}{a} = \frac{Sq}{a} + \frac{sq}{a}$, et par conséquent $R = \frac{S+s}{aa}$. Donc la tension du cordon CQ est $Q(g+q) + \frac{(S+s)q}{aa} = \frac{gP[Qa^2b + Qab^2 + b(S+s)]}{a(Pb^2 + Qa^2 + S + s)}$, en mettant pour q sa valeur et réduisant.

Les tensions des deux cordons BP, CQ, produisent sur l'axe A commun aux deux roues une pression verticale,

égale à leur somme, et qui a par conséquent pour expression,

$$\frac{gP(Qaa + Qab + S + s)}{Pbb + Qaa + S + s} + \frac{gP[Qa^2b + Qab^2 + b(S + s)]}{a(Pbb + Qaa + S + s)}.$$

Si on veut avoir l'effort total que supporte l'axe, il faut ajouter le poids des roues à la pression que nous venons de trouver.

Proposition VII. Problême.

424. Soit *un corps* P (Fig. 186) *partagé en deux parties égales et semblables par le plan* RFH; *et supposons que ce corps soit traversé perpendiculairement par un aissieu cylindrique* CBD, *dont l'axe passe par son centre de gravité* P, *et autour duquel s'enveloppe le fil* ECDB *attaché fixement en* E : *on demande la vîtesse avec laquelle le poids proposé descendra, lorsqu'après avoir mis la partie* EC *du fil dans une situation verticale, on l'abandonnera à lui-même.*

Puisque la partie EC du fil est verticale au premier instant, il s'ensuit que ce même fil réagira suivant la direction CE parallele à celle de la pesanteur, et fera tourner le corps autour de l'axe de l'aissieu. Donc (391) le centre de gravité du corps descendra toujours suivant une ligne verticale, et la partie EC du fil demeurera aussi toujours verticale. De plus, si l'on mene les horizontales AE, PC, il est évident qu'à cause de AP = EC, la vîtesse avec laquelle le point C tournera sera la même que la vîtesse verticale du centre de gravité P.

Cela posé, soient PN l'espace que le centre de gravité P auroit parcouru en un instant par la pesanteur, si le corps étoit tombé librement; PM l'espace que ce même point P parcourt à cause de la réaction du fil. Nommons g la gravité naturelle PN; f la force accélératrice PM, ou la force de rotation du point C; a le rayon PC; P la masse du corps proposé; S la somme des produits des molécules de ce corps par les quarrés de leurs distances à l'axe P. Le mouvement perdu par le corps P sera exprimé par P $(g - f)$. Ce

mouvement tend le fil; et comme la tension du fil est la même dans le sens EC et dans le sens CE, nous pouvons concevoir que la force $P(g-f)$ réagit dans le sens CE, et qu'elle produit en conséquence le mouvement de rotation du corps autour de son centre de gravité. Donc le moment de $P(g-f)$, par rapport au centre P, est égal au moment du mouvement de rotation, autour du même centre. Ainsi on aura l'équation $P(g-f)a=\frac{Sf}{a}$; d'où l'on tire, $f=\frac{gPaa}{Paa+S}$: équation qui donne le rapport de la force accélératrice f à la gravité g, et qui fait voir que le centre de gravité en descendant, et le point C en tournant, ont des mouvements uniformément accélérés.

Corollaire.

425. La tension du fil EC, qui est égale au mouvement perdu par le corps P, a pour expression, $P(g-f)$ ou $\frac{gP.S}{Paa+S}$.

Par exemple, si le corps proposé se réduit au cercle CBD, on trouvera, en évaluant la quantité S, comme on l'a enseigné (398), et faisant les autres réductions, $f=\frac{2}{3}g$; et la tension du fil $=\frac{g.ka^2}{6}$, en nommant k le rapport de la circonférence du cercle à son rayon.

Proposition VIII. Problème.

426. Tout *étant d'ailleurs le même que dans le problème précédent, supposons* (Fig. 187) *que le fil, au lieu d'être arrêté en* E, *passe sur une poulie fixe* V, *et même, s'il est nécessaire, sur une seconde poulie* Z *de renvoi; et qu'un corps pesant* Q *soit attaché à son extrémité* Q : *on demande les expressions des forces accélératrices des deux corps* Q *et* P.

Soient les petits espaces égaux QK, PN, ceux que les

deux corps auroient parcourus en un instant par leur pesanteur naturelle; QH, PM, les espaces qu'ils parcourent réellement par leur mouvement forcé. Nommons g la gravité naturelle QK ou PN; q la force accélératrice QH; p la force accélératrice PM; f la force de rotation du point C; a le rayon PC; S la somme des produits des molécules du corps P par les quarrés de leurs distances à l'axe P.

Cela posé, 1°. le mouvement perdu par le corps Q, qui peut être censé dirigé suivant CE, agit sur le centre de gravité P du corps P, de la même maniere que si le fil passoit par ce point (391). Ainsi il est évident qu'on aura, $Q \times HK = P \times MN$, ou bien (A) $Q(g-q) = P(g-p)$.

2°. Le moment de la tension du fil CE, ou du mouvement perdu par le corps Q, relativement au centre P, doit être égal au moment du mouvement gagné par le corps P, en tournant autour du même point P. Ainsi on aura l'équation,

(B) $Q(g-q)\,a = \frac{Sf}{a}$.

3°. On remarquera que si le centre P étoit fixe, on auroit, $f = q$; mais, puisque le point C descend de la quantité q dans le temps que le point Q descend de la quantité q, il est clair qu'on aura, (C) $f = q + p$.

Comparant ensemble les trois équations (A), (B), (C), et dégageant les trois inconnues, on trouvera,

$$q = \frac{g.[P.Qaa - (P-Q).S]}{P.Qaa + (Q+P).S};$$

$$p = \frac{g.[P.Qaa + (P-Q).S]}{P.Qaa + (Q+P).S};$$

$$f = \frac{2gP.Qaa}{P.Qaa + (Q+P).S}.$$

On voit que tous les mouvements, progressifs ou de rotation, sont uniformément accélérés.

COROLLAIRE. I.

427. Ces formules font connoître tout ce qui peut arriver

aux mouvements des deux corps proposés. Si l'on a, $(P-Q)S=P.Qaa$, ou bien $Q=\frac{P.S}{Paa+S}$, on aura, $q=0$. Alors le corps Q ne montera ni ne descendra. Ce corps fera, par rapport au corps P, la même fonction que faisoit le point fixe E dans le problème précédent, et on aura, $gQ=P(g-p)=\frac{gP.S}{Paa+S}$.

Si l'on a $(P-Q)S > P.Qaa$, ou $Q < \frac{P.S}{Paa+S}$, le corps Q montera au lieu de descendre, comme on l'a supposé, parcequ'alors la valeur de q devient négative.

Si l'on a $Q.S > P.Qaa + P.S$, ou $Q > \frac{P.S}{S-Paa}$, le poids P montera au lieu de descendre, comme on l'a supposé, parcequ'alors la valeur de p est négative.

Corollaire II.

428. Le fil CEVZXQ est également tendu dans tous ses points, et sa tension est égale au mouvement perdu par le corps Q : elle a par conséquent pour expression, $Q(g-q)$, ou $\frac{2g.Q.P.S}{P.Qaa+(Q+P)S}$.

Si on veut connoître la pression que supportera le centre de chaque poulie, on verra, comme dans l'article 421, que si l'on nomme m l'angle que forment ensemble deux cordons tangents à l'une des poulies, la pression du centre de cette poulie sera exprimée par $\frac{2g.Q.P.S}{P.Qa^2+(Q+P)S} \times \frac{\sin. m}{\sin. \frac{1}{2}m}$.

Proposition IX. Lemme.

429. Si l'on a (Fig. 188) *un système quelconque de corpuscules* A, B, C, *etc.*, *solidement liés entre eux d'une maniere quelconque, et situés ou non situés dans un même plan; je dis que la somme des produits de tous ces corpus-*

cules par les quarrés de leurs distances à un axe quelconque H, *qui ne passe pas par le centre de gravité du systéme, est égale à la somme des produits des mêmes corpuscules par les quarrés de leurs distances à un axe passant par le centre de gravité et parallele au premier, plus au produit de la somme des corpuscules multipliée par le quarré de la distance des deux axes.*

Que les corps proposés soient situés ou non dans un même plan, nous pouvons concevoir que tout le systême est projeté orthogonalement sur un même plan perpendiculaire à l'axe H ; car les lignes que nous avons besoin de considérer conserveront dans cette projection leurs grandeurs réelles et leurs positions respectives. Je suppose donc que les corps A, B, C, etc., soient situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe proposé H ; d'où il résulte que cet axe est représenté par un point ; que le point G représente un axe passant par le centre de gravité du systême, et parallele à l'axe H : il est question de démontrer que, si l'on mene les droites AH, BH, CH, etc., AG, BG, CG, etc., on aura : $A \times (AH)^2 + B \times (BH)^2 + C \times (CH)^2 + \text{etc.} = A \times (AG)^2 + B \times (BG)^2 + C \times (CG)^2 + \text{etc.} + (A + B + C + \text{etc.}) \times (GH)^2$.

Prolongez la droite GH ; et des points A, B, C, etc., abaissez sur GH et sur son prolongement les perpendiculaires AN, BE, CM, etc. Le triangle AGH donne (Géom.), $(AH)^2 = (AG)^2 + (GH)^2 - 2\,GH \times GN$, et par conséquent $A \times (AH)^2 = A \times (AG)^2 + A \times (GH)^2 - A \times 2GH \times GN$.

Le triangle obtusangle BGH donne (Géom.), $(BH)^2 = (BG)^2 + (GH)^2 + 2\,GH \times GE$, et par conséquent $B \times (BH)^2 = B \times (BG)^2 + B \times (GH)^2 + B \times 2\,GH \times GE$.

Le triangle CGH donne (Géom.), $(CH)^2 = (CG)^2 + (GH)^2 - 2\,GH \times GM$, et par conséquent $C \times (CH)^2 = C \times (CG)^2 + C \times (GH)^2 - C \times 2GH \times GM$.

Ainsi de suite, s'il y avoit un plus grand nombre de corps. Par conséquent on aura, (A) $A \times (AH)^2 + B \times (BH)^2 + C \times (CH)^2 + \text{etc.} = A \times (AG)^2 + B \times (BG)^2 + C \times$

$(CG)^2 + A \times (GH)^2 + B \times (GH)^2 + C \times (GH)^2 - A \times 2GH \times GN + B \times 2GH \times GE - C \times 2GH \times GM +$ etc. Or le point G étant le centre de gravité du systême, on a (96), $B \times EG = A \times NG + C \times MG$; et par conséquent on aura, $B \times 2GH \times GE = A \times 2GH \times GN + C \times 2GH \times GM$, ou bien $B \times 2GH \times GE - A \times 2GH \times GN - C \times 2GH \times GM = 0$. Ainsi l'équation (A) se réduit à celle-ci, $A \times (AH)^2 + B \times (BH)^2 + C \times (CH)^2 +$ etc. $= A \times (AG)^2 + B \times (BG)^2 + C \times (CH)^2 +$ etc. $+ (A + B + C +$ etc. $) \times (GH)^2$.

Corollaire.

430. Il est clair que cette démonstration s'applique à un corps de grandeur quelconque, puisqu'il est permis de regarder ce corps comme le systême d'une infinité de corpuscules A, B, C, etc. On peut donc poser ce principe général : *la somme des produits des particules d'un corps quelconque par les quarrés de leurs distances à un axe, qui ne passe pas par le centre de gravité, est égale à la somme des produits des mêmes particules par les quarrés de leurs distances à un axe passant par le centre de gravité, et parallele au premier, plus au produit de la masse entiere du corps multipliée par le quarré de la distance des deux axes.*

Proposition X. Problême.

431. Supposons (Fig. 189) *un corps placé sur une table horizontale, ou flottant sur un fluide, et représenté par la droite* AB, *qui passe par son centre de gravité : il s'agit de trouver une courbe* MKM' *(qu'il faut regarder comme une petite verge inflexible, liée inébranlablement au corps), telle que plaçant et fixant sur sa circonférence de petits corps égaux, l'angle de rotation que produit autour du centre de gravité de tout le systême une force* F, *qui frappe ou pousse perpendiculairement* AB, *demeure toujours le même.*

On voit (391) que la force F imprimera à la verge deux

mouvements, l'un de translation, parallele à sa direction, l'autre de rotation autour du centre de gravité. Le premier mouvement sera toujours le même, quelles que puissent être les places des petits corps qu'on veut ajouter au corps proposé; mais toutes ces places ne sont pas indifférentes relativement au mouvement de rotation, et il s'agit de trouver la courbe, qui en est le *lieu géométrique*, suivant les conditions du problême. Or il est clair d'abord que la courbe cherchée MKM′ doit être divisée en deux parties égales et semblables par la droite AB, et qu'en la formant il faudra, à chaque opération, placer de part et d'autre de AB deux corps égaux dans les deux points symmétriques M et M′, ou, ce qui revient au même, partager un petit corps donné en deux parties égales, et placer ces deux parties aux points M et M′ respectivement. Soit pris le point fixe K pour l'origine de la courbe; et soient KP, PM ou PM′ les coordonnées pour le point M ou M′. Soient G le centre de gravité du corps avant l'addition des deux nouveaux corps égaux aux points M et M′, g le centre de gravité après l'addition de ces deux corps, bxc l'angle de rotation du corps AB.

Nommons
- la distance FG de la force F au centre de gravité primitif G . . . . . . a,
- GK . . . . c,
- la masse du corps AB, avant l'addition des deux nouveaux corps . . . . P,
- chacun des deux nouveaux corps . . . p,
- la somme des produits des particules de P par les quarrés de leurs distances au centre de gravité primitif . . . . S,
- la somme des produits des particules du système $(P + 2p)$ par les quarrés de leurs distances au nouveau centre de gravité g . . . . Z,
- l'angle de rotation bxc pour le rayon 1 . . u,
- KP . . . . x,
- PM. . . . . y.

On aura, par la propriété du centre de gravité, $Gg = \frac{2p(c-x)}{P+2p}$; donc $Fg = a + \frac{2p(c-x)}{P+2p}$. Le triangle rectangle GPM donne $(GM)^2$ ou $(GM')^2 = yy + (c-x)^2$. Donc la somme des produits des particules de tout le système $P + 2p$, par les quarrés de leurs distances au centre de gravité primitif G, aura pour expression, $S + 2p \times [yy + (c-x)^2]$. Mais, puisque le point g est le centre de gravité actuel, il est clair qu'on a, par l'article précédent, $S + 2p\,[yy + (c-x)^2] = Z + (P + 2p) \times (Gg)^2 = Z + \frac{4p^2(c-x)^2}{P+2p}$; ce qui donne, $Z = S + \frac{2Pp(yy + (c-x)^2) + 4p^2y^2}{P+2p}$. Or le moment de la force F, par rapport au centre de gravité g, doit être égal au moment du mouvement gagné par le système $P + 2p$ autour du même point. Ainsi on aura, $F \times Fg = \frac{Z \times u}{1}$, ou bien $F\left(a + \frac{2p(c-x)}{P+2p}\right) = u\left(S + \frac{2Pp(yy + (c-x)^2 + 4p^2y^2}{P+2p}\right)$; et par conséquent . . . .
$u = \frac{F[a(P+2p) + 2p(c-x)]}{S(P+2p) + 2Pp(c-x)^2 + (2Pp + 4p^2)y^2}$. Or, suivant les conditions du problême, l'angle u doit être toujours le même, quels que soient les deux points de la courbe où l'on place symmétriquement les deux nouveaux corps; il sera donc le même pour les deux points M et M', que si on plaçoit les deux nouveaux corps au point K regardé comme double, où l'on a, $x = 0$, $y = 0$, et par conséquent $u = \frac{F(a(P+2p) + 2pc)}{S(P+2p) + 2Ppc^2}$. Egalant donc entre elles les deux valeurs de u, et divisant chaque membre par F, on aura,
$\frac{a(P+2p) + 2p(c-x)}{S(P+2p) + 2Pp(c-x)^2 + (2Pp + 4p^2)y^2} = \frac{a(P+2p) + 2pc}{S(P+2p) + 2Ppc^2}$;
d'où l'on tire (en faisant, pour abréger, $P + 2p = q$), $\frac{q}{P}y^2 = \left(\frac{2acPq + 2Ppc^2 - Sq}{P(aq + 2pc)}\right)x - xx$; équation d'une ellipse dont l'axe des x a pour valeur, $\frac{2acPq + 2Ppc^2 - Sq}{P(aq + 2pc)}$; et

pour parametre $\frac{2acPq + 2Ppc^2 - Sq}{q(aq + 2pc)}$. Cette ellipse differe peu d'un cercle, parceque p étant fort petit en comparaison de P, il s'en faut peu qu'on ait, $\frac{q}{P} = 1$.

Ce problême est utile dans l'arrimage des vaisseaux, lorsque, pour diminuer les mouvements de roulis ou de tangage, ou pour remplir quelque autre objet, on a besoin de transposer certains poids d'une place à l'autre, et qu'on ne veut pas néanmoins que ce changement en fasse naître aucun dans le mouvement de rotation que produit l'action du gouvernail. J'ai traité amplement cette matiere dans mes deux pieces qui ont partagé les prix de l'académie pour les années 1761 et 1765.

CHAPITRE V.

Considérations mathématiques et physiques sur les Machines en mouvement.

432. Le choix qu'on fait d'une machine pour produire un certain effet doit être subordonné à la nature de cet effet. S'il est question de remuer un gros poids, de le faire glisser ou rouler sur le terrain, on emploie un simple levier; s'il faut tirer de l'eau d'un puits, on y parvient au moyen d'une corde qui soutient le seau, et qui va passer sur une poulie, etc. Il en est de même dans les autres cas. Quelquefois les circonstances locales ne permettent pas d'employer la machine, qui, considérée en elle-même, seroit la plus propre à remplir complètement l'effet qu'on se propose; mais du moins, avec une bonne théorie et un peu d'usage, on trouvera toujours la machine, qui, dans l'état donné

des choses, sera de la pratique la plus avantageuse. Il ne s'agit plus que d'apprécier exactement son produit.

433. D'APRÈS les principes établis dans la premiere partie de cet ouvrage, on est en état de déterminer l'équilibre d'une machine quelconque, simple ou composée. Ainsi, connoissant la force qu'on peut appliquer à une machine, on connoîtra la mesure de la résistance qui lui fait équilibre; ou bien réciproquement, connoissant la résistance, on connoîtra la force. J'énonce cette proposition alternative, parcequ'on ne peut pas toujours descendre de la cause à l'effet, et qu'on est quelquefois obligé de remonter de l'effet à la cause.

434. SUPPOSONS donc qu'on ait calculé l'équilibre d'une machine, c'est-à-dire la proportion qui doit se trouver entre la puissance et la résistance, pour que la machine, actuellement en repos, soit prête à prendre du mouvement, si l'on vient à augmenter l'une de ces deux forces. Imaginons qu'on augmente la puissance: le mouvement naîtra peu-à-peu, et s'accélérera par degrés. Cette accélération durera tant que la puissance sera plus forte que la résistance. Mais si, par quelque cause que ce soit, la puissance vient à diminuer, ou que, la puissance demeurant la même, la résistance vienne à augmenter, l'accélération diminuera; et, lorsque la puissance et la résistance auront les valeurs simplement requises pour l'équilibre, le mouvement deviendra uniforme; il demeurera tel en vertu de l'inertie de la matiere; la puissance ne fera plus à chaque instant que combattre les coups sans cesse renaissants de la résistance.

435. LES machines mues par le choc de l'eau offrent un exemple bien sensible de la diminution de la force, à mesure que le mouvement s'accélere; car, qu'un fluide aille choquer un corps en repos, il le pressera de toute sa force, et le choc sera le plus grand qu'il est possible. Mais, si le

corps vient à céder, le choc diminuera peu-à-peu : et, lorsque le corps aura acquis enfin la même vitesse que le fluide, il n'y aura plus de choc. Le mouvement du corps choqué s'accélere donc de moins en moins, et parvient bientôt à l'uniformité. Nous examinerons la nature de ce mouvement dans l'Hidrodynamique ; et alors nous déterminerons tout ce qui est relatif à l'action des machines mues par le choc ou par le poids de l'eau.

436. Considérons ici une machine d'une autre espece ; celle de la Figure 111 ou 112, laquelle est mue par un homme qui marche dans un grand tambour, et qui fait monter un poids P au moyen d'une corde qui s'enveloppe sur un cylindre. En nommant g la gravité, H la masse de l'homme, et a son bras de levier par rapport à l'axe de mouvement ; P la masse du poids élevé, et b son bras de levier ; S la somme des produits des molécules de la machine, qui ont un mouvement rotatoire, par les quarrés de leurs distances à l'axe de rotation : on trouvera, par la méthode de l'article 422, que la force accélératrice de l'homme, pour un instant donné, c'est-à-dire l'espace qu'il sera capable de parcourir verticalement, dans le même temps qu'un corps grave parcourroit l'espace g en vertu de la pesanteur naturelle, a pour expression, $g \times \frac{(Haa - Pab)}{Haa + Pbb + S}$. D'où l'on voit que, si l'on a, $Ha = Pb$, il y aura équilibre, mais que, si l'on a, $Ha > Pb$, le mouvement s'accélérera.

L'homme entrant dans la roue s'éloigne, dans le sens convenable, de la verticale qui répond à l'axe de la machine : tant que sa distance à cette ligne n'excede pas $\frac{Pb}{H}$, il n'engendre point de mouvement ; mais, comme il cherche à en produire, il se portera à une distance plus grande que $\frac{Pb}{H}$. Or, à l'instant qu'il passe la limite $\frac{Pb}{H}$, le mouvement com-

mence et s'accélere. Il augmenteroit de plus en plus, si l'homme pouvoit s'éloigner de plus en plus de la verticale proposée, ou même rester constamment en delà du point d'équilibre; mais pour cela il faudroit qu'il pût accélérer sa propre marche, à raison de l'accélération du plancher mobile qui le soutient. Or il n'a pas une telle faculté; car, s'il prenoit trop de vîtesse, il seroit bientôt épuisé de fatigue et absolument hors d'état de continuer sa marche. S'il s'est donc porté d'abord en avant du point d'équilibre, il y revient, lorsque la roue a une vîtesse compatible avec celle qui lui permet de soutenir le travail qu'on exige de lui, travail qui dépend de la force naturelle de l'homme et du temps qu'il doit durer. Alors l'homme étant ainsi parvenu à se placer dans la roue au point d'équilibre, ce qui s'exécute toujours dans un temps assez court, il ne fait plus qu'entretenir le mouvement qu'il a produit d'abord par son action en avant du point d'équilibre. Le mouvement se perpétue donc uniformément, puisque l'homme est maintenant en équilibre avec l'effort de la résistance, qui se répete sans cesse comme l'action de la pesanteur. Du reste, je n'entends pas ici une *uniformité* rigoureuse et absolue; car on sent que, dans l'état physique des choses, il n'est pas possible que l'homme se place sans cesse exactement dans le point d'équilibre : il pourra s'en éloigner alternativement de part et d'autre, ce qui accélérera ou retardera le mouvement; mais ces variations seront légeres, et n'empêcheront pas que le mouvement ne puisse être regardé sensiblement comme uniforme.

Si on veut avoir égard au frottement et à la roideur de la corde, il faudra diminuer l'effort de l'homme, de la quantité équivalente à ces deux résistances.

Supposons, pour rendre sensibles ces observations générales, que, par une évaluation exacte ou du moins approchée des quantités a, b, H, P, S, on trouve que l'expression $\frac{Haa - Pab}{Haa + Pbb + S}$, qui représente toujours un nombre

absolu, se réduise à la fraction $\frac{1}{400}$. De plus, supposons qu'il se soit écoulé une minute, depuis l'instant que la machine a commencé à se mouvoir jusqu'à celui où elle est parvenue à la vitesse qu'elle conserve uniformément. Puisque, suivant la table II de l'article 329, un corps, qui tombe librement par sa pesanteur pendant une minute, acquiert une vitesse capable de lui faire parcourir uniformément 1810 pieds en une seconde, il est clair que, dans le cas présent, l'homme qui a acquis une vitesse quatre cents fois moindre, sera capable de parcourir uniformément et suivant la verticale environ $4\frac{1}{2}$ pieds en une seconde. Telle sera donc également la vitesse constante avec laquelle tourne un point de la roue, situé à la distance donnée *a* du centre. Connoissant cette vitesse, on connoîtra la vitesse de la circonférence de la roue; et celle avec laquelle monte le poids P, puisque toutes ces vitesses sont proportionnelles aux rayons des arcs décrits par les points auxquels elles répondent, et qu'on est censé connoître toutes les dimensions de la machine.

437. Il en est à-peu-près de même dans les machines où, la force motrice étant constante, la résistance augmente à mesure que le mouvement s'accélere. L'accélération ne dure qu'un certain temps; et le mouvement devient bientôt uniforme, au moins sensiblement. Ainsi, par exemple, dans un tournebroche mu par un poids, l'action de ce poids est constamment la même pendant toute la durée du mouvement; d'où il paroît s'ensuivre que ce mouvement devroit s'accélérer sans cesse; mais la résistance que le poids moteur est obligé de combattre, augmente dans les premiers instants: un régulateur, garni de palettes qui frappent l'air, et qui éprouvent de sa part d'autant plus de résistance qu'elles le frappent avec plus de vitesse, réduit en peu de temps le mouvement à l'uniformité. Le poids fait alors équilibre à chaque instant à l'action combinée de toutes les résistances qui s'opposent à sa descente.

438. On emploie, pour mouvoir les machines, toutes sortes d'agents, la force de l'eau, celle du vent, des ressorts, des hommes, des chevaux, des bœufs; etc. Les machines en petit, telles que les montres et les pendules, sont mues ordinairement par des ressorts ou par des poids; les machines en grand, comme les moulins, sont mues par l'action de l'eau ou du vent. Mais, quelque agent qu'on mette en œuvre, on doit s'attacher à connoître très exactement la force dont il est capable, relativement aux résistances qu'il est obligé de combattre, pour ne pas s'exposer quelquefois au danger de construire à grands frais une machine qui ne marchera point, ou qui produira un effet fort inférieur à celui qu'on en attendoit.

439. Parmi les agents animaux, on estime que le travail d'un homme est environ la moitié de celui d'un âne, la septieme partie de celui d'un cheval, etc. Ainsi, toutes les fois que les circonstances le permettront, on doit employer, pour mouvoir une machine, l'âne, le cheval, préférablement à l'homme; mais il y a beaucoup de cas où l'on choisit l'homme, tant à cause de son intelligence, que pour se procurer des machines plus simples, et conséquemment moins sujettes au frottement ou aux autres résistances qui absorbent en pure perte une partie de la force mouvante. Examinons donc ici en peu de mots l'action dont un homme est capable. On appliquera facilement les mêmes principes aux autres animaux.

440. De quelque maniere qu'un homme agisse pour mouvoir une machine, nous pouvons concevoir qu'il éleve un certain poids avec une certaine vîtesse que nous supposons uniforme, car il ne s'agit pas ici de considérer l'accélération qui a lieu dans les premiers instants du mouvement. Ainsi l'action qu'il exerce à chaque instant, est le produit du poids élevé par sa vîtesse. D'où il résulte que le travail total et absolu, pour un temps donné, est en raison com-

posée du poids élevé, de sa vitesse, et du temps : il peut donc être représenté par un certain nombre de livres de matiere, élevées à une hauteur donnée pendant un temps donné. Reste à déterminer cet effet par la voie de l'expérience. Or, suivant le célebre D. Bernoulli (1), un homme appliqué tous les jours à un certain travail, et chaque jour pendant huit heures de temps, pourra élever vingt livres à la hauteur de trois pieds à chaque seconde, ou bien soixante livres à la hauteur d'un pied; ce qui fait 1728000 livres à la hauteur d'un pied pendant huit heures. « J'ai adopté ce « résultat, poursuit Bernoulli, sur un grand nombre d'ob- « servations, et avec toute la circonspection requise : j'ai « vu des cas où l'homme faisoit trois fois plus d'effet pen- « dant chaque seconde ; mais il n'auroit pu soutenir ce « travail que pendant quelques minutes de suite. Si on ne « vouloit imposer aux hommes que quatre heures de travail « par jour, je crois qu'on pourroit leur donner la tâche « d'élever chacun 120 livres à un pied de hauteur à chaque « seconde de travail. Cependant le partage le plus con- « forme à la constitution de l'homme est, à mon avis, « celui de huit heures de travail par jour, etc. »

441. On trouve dans le Cours de physique expérimentale du docteur Désaguliers quelques expériences sur la force de l'homme, mais elles ne sont pas toutes également précises. En voici une qui peut jeter du jour sur cette matiere.

Soit un tour dont la manivelle ait 14 pouces (2) de lon-

---

(1) Dans sa piece *sur le moyen de suppléer en mer à l'action du vent*, qui remporta le prix de l'académie en 1753.

(2) Tom. II, pag. 594. Comme je n'ai pas l'original sous la main, et que je me sers de la traduction du P. Pezenas, j'ignore si on emploie ici dans les mesures le pied anglais, ou le pied français ; si c'est le pied anglais, il faudra, pour ramener les résultats à notre maniere de compter, les diminuer, à raison de ce que le pied anglais ne contient qu'environ 11 $\frac{1}{2}$ pouces du nôtre.

gueur, et dont le cylindre de bois soit grossi en dessus par des pieces ajoutées, de maniere qu'elles lui donnent une circonférence égale à celle que décrit l'extrémité de la manivelle, ou la main de l'homme qui y est appliquée, et que par conséquent le poids qu'on éleve au moyen d'une corde qui s'enveloppe sur le rouleau, monte avec la même vitesse que tourne la main de l'homme. L'expérience apprend qu'un homme ne peut pas travailler long-temps s'il lui faut élever trente livres, mais qu'il peut fort bien élever vingt-cinq livres pendant six ou huit heures.

En faisant faire à la manivelle trente tours en une minute, et considérant que le cercle du diametre décrit par l'homme est de 28 pouces, que par conséquent sa circonférence est d'environ 88 pouces; on verra que l'homme décrit dans une minute 30 × 88 pouces, c'est-à-dire 220 pieds. Par conséquent, si le poids élevé est de trente livres, le travail de l'homme sera trente livres de matiere élevées à 220 pieds de hauteur en une minute, ou 30 × 220 livres, c'est-à-dire 6600 livres élevées à un pied de hauteur en une minute, et par conséquent 3168000 livres élevées à un pied de hauteur en huit heures; résultat qui surpasse beaucoup celui de Bernoulli.

Si, tout restant d'ailleurs le même, le poids élevé est de 25 livres, le travail de l'homme sera 5500 livres élevées à un pied de hauteur en une minute, et par conséquent 2640000 livres élevées à un pied de hauteur en huit heures.

Si le poids élevé est de 20 livres, le travail de l'homme sera 4400 livres élevées à un pied de hauteur en une minute, et par conséquent 2112000 livres élevées à un pied de hauteur en huit heures.

Ce dernier résultat, qui se rapproche de celui de Bernoulli, est le plus naturel pour un homme d'une force ordinaire. Si le travail devoit être continué pendant plusieurs jours, il ne faudroit guere compter sur un effet plus grand que celui qui a été déterminé par Bernoulli.

442. Le travail de l'homme, tel que nous venons de l'évaluer, est celui dont il est capable, en supposant qu'il exerce sa force de la maniere la plus avantageuse ; car on doit bien remarquer que, dans les mouvements que l'homme donne à son corps pour la production d'un effet extérieur, il ne peut pas passer une certaine vîtesse, sans que son action diminue, et que même cette vîtesse a des limites assez étroites. Ainsi, par exemple, un homme pourra bien élever un poids de vingt livres avec une vîtesse de trois pieds par seconde, et continuer ce travail pendant plusieurs heures ; mais il ne pourroit pas élever un poids de quatre livres avec une vîtesse de quinze pieds par seconde, quoique l'effet soit le même dans les deux cas ; car on sent que la seconde vîtesse est beaucoup trop grande, relativement à la constitution physique de la machine humaine. Un homme pourra élever dix livres avec une vîtesse de six pieds par seconde ; mais il sera plus fatigué que s'il élevoit un poids double avec une vîtesse deux fois moindre. On doit donc s'attacher, dans les machines qui doivent être mues par l'action des hommes, à proportionner tellement les bras de levier, que les hommes ne prennent pas une trop grande vîtesse, si l'on veut tirer tout le parti possible de leurs forces.

443. Bernoulli croit que, malgré l'inégalité qui peut se trouver dans les vîtesses de l'homme, pourvu néanmoins que cette inégalité demeure dans de certaines limites, le travail total et absolu sera toujours le même. Ainsi, selon lui, si un homme peut élever un poids de vingt livres avec trois pieds de vîtesse, il pourra élever un poids de soixante livres avec un pied de vîtesse, ou trente livres avec deux pieds de vîtesse, ou quinze livres avec quatre pieds de vîtesse, ou même douze livres avec cinq pieds de vîtesse ; et tout cela, sans se fatiguer ni plus ni moins. D'où il conclut que tous les hommes d'une constitution égale seront également fatigués après avoir produit des effets égaux, de

quelque maniere que ces différents hommes aient été employés. Il présume même que « la constitution des hommes « peut être extrêmement différente, sans que les travaux « journaliers dont ils sont capables pendant un grand « nombre de jours de suite soient considérablement diffé- « rents. Tel homme charnu et vigoureux pourra peut-être « faire trois ou quatre fois plus de travail, qu'un autre « décharné et d'une constitution beaucoup plus foible ne « pourra faire dans un temps égal; mais, si chacun de « ces deux hommes si différents en vigueur étoit appliqué « pendant un grand nombre de jours de suite à une même « sorte de travail jusqu'à se fatiguer également, je doute « si leurs effets seroient fort inégaux ». Mais ces idées de Bernoulli n'ont pas été adoptées généralement parmi les mécaniciens, ou du moins ne le sont aujourd'hui qu'avec certaines modifications qu'il seroit trop long d'indiquer ici.

444. Si on connoissoit exactement la loi suivant laquelle la force de l'homme varie lorsque sa vîtesse varie, on pourroit déterminer dans chaque machine particuliere la vîtesse ou le bras de levier qu'il faut donner à l'homme, pour que l'effet résultant de son travail soit un *maximum*.

Supposons, par exemple, que la force de l'homme diminue en même raison que sa vîtesse augmente. Soit F la force absolue que l'homme en repos est capable d'exercer contre un poids, pendant un temps donné, tel que huit heures; et supposons que, lorsqu'il se meut avec la vîtesse V, il perde tout l'exercice de cette force. Il est clair que, lorsqu'il se mouvra avec une vîtesse u moindre que V, il perdra une partie de sa force absolue F, exprimée par $\frac{Fu}{V}$. Par conséquent il n'exercera plus contre la machine qu'une force exprimée par $F - \frac{Fu}{V}$, ou par $F\left(1 - \frac{u}{V}\right)$. Nommons a le bras de levier de cette force, P le poids élevé, b son bras de levier, U sa vîtesse. Le mouvement étant

parvenu à l'uniformité, on aura, $F\left(1-\frac{u}{V}\right)a=Pb$, ou bien (en observant qu'on a la proportion, $a:b::u:U$, et mettant u pour a, U pour b), $F\left(1-\frac{u}{V}\right)u=PU$. Or PU représente l'effet de l'homme pour un temps donné. Donc, si l'on veut que cet effet soit un *maximum*, $F\left(1-\frac{u}{V}\right)u$ en sera aussi un; et, comme F et V sont des quantités constantes et supposées données, la question se réduit à faire en sorte que la quantité $Vu-uu$ soit un *maximum*. Or, si l'on suppose que V représente le diametre d'un cercle, u une abscisse prise sur ce diametre, on verra que $\sqrt{[Vu-uu]}$ représentera l'ordonnée correspondante, et que cette ordonnée ou son quarré deviendra un *maximum*, lorsqu'on aura, $u=\frac{V}{2}$. La vîtesse qu'il faut donner à l'homme doit donc être la moitié de celle qui lui enleve tout l'exercice de sa force. Ainsi, si V est une vîtesse de dix pieds par seconde, u sera une vîtesse de cinq pieds par seconde; si V est une vîtesse de huit pieds par seconde, u sera une vîtesse de quatre pieds par seconde, etc.

Substituant pour u sa valeur $\frac{V}{2}$ dans l'équation générale $PU=F\left(1-\frac{u}{V}\right)u$, on aura, $PU=\frac{FV}{4}$, qui est l'expression du plus grand effet de la machine.

Je ne donne ces calculs que pour des exemples purement hypothétiques; car il faut avouer que cette matiere a besoin encore de quelques nouvelles expériences, pour être pleinement éclaircie.

FIN.

NOTES

SUR PLUSIEURS ENDROITS.

Le traité précédent est à la portée de tous les lecteurs instruits dans l'arithmétique, l'algebre, et la géométrie élémentaire. Les notes suivantes sont destinées à étendre certaines théories, au moyen des calculs différentiel et intégral, ou à faire quelques applications de la mécanique à la pratique; recherches qui auroient trop interrompu la chaîne des propositions dont le corps de l'ouvrage est composé, si on les avoit insérées dans les endroits auxquels elles se rapportent.

NOTE I. STATIQUE. CHAP. II. PAGE 74.

Maniere générale de trouver les centres de gravité des lignes, des superficies, et des solides, dont la nature est exprimée par une équation.

I. J'ai donné dans le chapitre cité les principes généraux pour trouver des centres de gravité; et j'ai appliqué, dans les articles 101, 102, 103, etc., ces principes à quelques figures ou corps géométriques. Ici je me propose de déterminer, au moyen du calcul intégral, les centres de gravité de toutes sortes de figures ou de corps, lorsque la loi de leur génération est donnée par une équation.

II. On trouve, en général, le centre de gravité d'une ligne, d'une superficie, ou d'un solide, en cherchant, au moyen de l'équation qui en exprime la nature, la distance de ce point à des lignes ou axes donnés de position dans l'espace; axes qu'il est à propos de supposer perpendiculaires entre eux, pour la plus grande simplicité des résultats. Soit donc une courbe quelconque AM (Fig. 190), rapportée aux coordonnées perpendiculaires AP, PM. Qu'on mene l'ordonnée *pm* infiniment voisine de PM. Nous prendrons pour axes de moments les droites AZ, AH, dont la premiere tombe sur l'abscisse AP; la seconde lui est perpendiculaire, ou parallele à l'ordonnée PM; et nous supposerons toujours $AP = x$, $PM = y$, $Pp = dx$, $Rm = dy$, $Mm = ds$, le rapport de la circonférence au rayon $= k$.

III. Problème I. *Trouver le centre de gravité de l'aire* APM, *comprise entre l'abscisse, l'ordonnée, et l'arc* AM.

Soit G le point cherché; et menons les perpendiculaires GO, GQ, à nos deux axes. Il est clair que l'aire du trapeze élémentaire PM*mp* est exprimée par ydx; que son moment, par rapport à AZ, est $\frac{y}{2} \times ydx$ ou $\frac{yydx}{2}$; et que son moment, par rapport à AH, est $xydx$. Ainsi (96) nous aurons, $GO \times APM$, ou $GO \times \int ydx = \int \frac{yydx}{2}$; $GQ \times APM$, ou $GQ \times \int ydx = \int xydx$. Donc $GO = \frac{\int yydx}{2\int ydx}$, et $GQ = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$.

D'où l'on voit qu'en exprimant en fonctions d'une même variable, à l'aide de l'équation de la courbe, les quantités qui sont sous les signes d'intégration, effectuant les intégrations, soit exactement, soit au moins par approximation, on connoîtra les droites GO, GQ, et par conséquent la position du centre de gravité G.

Par exemple, soit la courbe proposée une parabole, dont l'équation est $yy = px$, p étant le parametre. On aura,

$dx = \frac{2ydy}{p}$, $\int ydx = \int \frac{2yydy}{p} = \frac{2y^3}{3p}$, $\int \frac{yydx}{2} = \int \frac{y^3dy}{p} = \frac{y^4}{4p}$, $\int xydx = \int \frac{2y^4dy}{pp} = \frac{2}{5}\frac{y^5}{p^2}$. Donc $GO = \frac{3}{8}y$, et $GQ = \frac{3yy}{5p} = \frac{3}{5}x$.

IV. Problême II. *Trouver le centre de gravité de l'arc quelconque* AM.

L'arc élémentaire Mm est exprimé par ds ou par $\surd(dx^2 + dy^2)$: son moment, par rapport à AZ, est $Mm \times MP$, ou $y\surd(dx^2 + dy^2)$; et son moment, par rapport à AH, est $Mm \times PA$, ou $x\surd(dx^2 + dy^2.)$ Donc, en supposant que le point G soit le centre de gravité de l'arc fini AM, et menant GO, GQ, perpendiculaires aux axes de moments, nous aurons (96), $GO \times AM$, ou $GO \times \int\surd(dx^2 + dy^2) = \int y\surd(dx^2 + dy^2)$; $GQ \times AM$, ou $GQ \times \int\surd(dx^2 + dy^2) = \int x\surd(dx^2 + dy^2)$. D'où l'on tire, $GO = \frac{\int y\surd(dx^2 + dy^2)}{\int\surd(dx^2 + dy^2)}$, et $GQ = \frac{\int x\surd(dx^2 + dy^2)}{\int\surd(dx^2 + dy^2)}$.

Soit toujours la courbe une parabole, dont l'équation est, $yy = px$. En mettant pour x sa valeur $\frac{yy}{p}$, pour dx^2 sa valeur $\frac{4yydy^2}{pp}$, les valeurs de GO et de GQ deviendront, $GO = \frac{\int ydy\surd(pp + 4yy)}{\int dy\surd(pp + 4yy)}$; $GQ = \frac{\int yydy\surd(pp + 4yy)}{\int pdy\surd(pp + 4yy)}$. Reste à effectuer les intégrations indiquées par les signes $\int$. Or,

1°. L'intégrale de $ydy\surd(pp + 4yy)$ est, $\frac{(pp + 4yy)^{\frac{3}{2}}}{12} + A$. La constante A doit être telle que l'intégrale s'évanouisse ; lorsque $y = 0$. Ainsi l'intégrale complete est, $\frac{(pp + 4yy)^{\frac{3}{2}} - p^3}{12}$.

2°. Pour intégrer $dy\surd(pp + 4yy)$, on fera, $pp + 4yy = zz$; ce qui donne, $y = \frac{\surd(zz - pp)}{2}$, $dy = \frac{zdz}{2\surd(zz - pp)}$, $dy\surd(pp +$

$4yy) = \frac{zzdz}{2\sqrt{(zz-pp)}}$. Mais $d[z\sqrt{(zz-pp)}] = dz\sqrt{(zz-pp)} + \frac{zzdz}{\sqrt{(zz-pp)}} = \frac{2zzdz}{\sqrt{(zz-pp)}} - \frac{ppdz}{\sqrt{(zz-pp)}}$; et par conséquent $\frac{zzdz}{2\sqrt{(zz-pp)}} = \frac{d[z\sqrt{(zz-pp)}]}{4} + \frac{ppdz}{4\sqrt{(zz-pp)}} = \frac{d[z\sqrt{(zz-pp)}]}{4} + \frac{pp}{4}\left(\frac{dz + \frac{zdz}{\sqrt{(zz-pp)}}}{z+\sqrt{(zz-pp)}}\right)$. Donc $\int\frac{zzdz}{2\sqrt{(zz-pp)}}$, ou $\int dy\sqrt{(pp+4yy)} = \frac{z\sqrt{(zz-pp)}}{4} + \frac{pp}{4}\,\mathrm{L.}[z+\sqrt{(zz-pp)}] + \mathrm{A} = \frac{y\sqrt{(pp+4yy)}}{2} + \frac{pp}{4}\,\mathrm{L.}[\sqrt{(pp+4yy)}+2y] + \mathrm{A} = \frac{y\sqrt{(pp+4yy)}}{2} + \frac{pp}{4}\,\mathrm{L.}\left(\frac{\sqrt{(pp+4yy)}+2y}{p}\right)$, en déterminant la constante A par la condition que l'intégrale s'évanouisse, lorsque $y = 0$.

3°. Pour intégrer $yydy\sqrt{(pp+4yy)}$, on observera que $d[y(pp+4yy)^{\frac{3}{2}}] = dy(pp+4yy)^{\frac{3}{2}} + 12yydy(pp+4yy)^{\frac{1}{2}} = pp.\,dy\sqrt{(pp+4yy)} + 16yydy\sqrt{(pp+4yy)}$; par conséquent $\int yydy\sqrt{(pp+4yy)} = \frac{y(pp+4yy)^{\frac{3}{2}}}{16} - \frac{pp}{16} \times \int dy\sqrt{(pp+4yy)} = \frac{y(pp+4yy)^{\frac{3}{2}}}{16} - \frac{p^2y\sqrt{(pp+4yy)}}{32} - \frac{p^4}{64} \times \mathrm{L.}\left(\frac{\sqrt{(pp+4yy)}+2y}{p}\right) = \frac{(p^2y+8y^3)\sqrt{(pp+4yy)}}{32} - \frac{p^4}{64} \times \mathrm{L.}\left(\frac{\sqrt{(pp+4yy)}+2y}{p}\right)$.

Il résulte de tous ces calculs qu'on aura :

$$\mathrm{GO} = \frac{(pp+4yy)^{\frac{3}{2}} - p^3}{6y\sqrt{(pp+4yy)} + 3p^2.\mathrm{L.}\left(\frac{\sqrt{(pp+4yy)}+2y}{p}\right)},$$

$$\mathrm{GQ} = \frac{2(p^2y+8y^3)\sqrt{(pp+4yy)} - p^4\mathrm{L.}\left(\frac{\sqrt{(pp+4yy)}+2y}{p}\right)}{32py\sqrt{(pp+4yy)} + 16p^3\,\mathrm{L.}\left(\frac{\sqrt{(pp+4yy)}+2y}{p}\right)}.$$

V. PROBLÈME III. *Trouver le centre de gravité de la superficie produite par la révolution de la courbe quelconque* AM *autour de* AP.

Il est clair que le centre de gravité cherché est placé dans l'axe AP. La zone élémentaire décrite par Mm, dont la valeur est $kyds$, peut être censée avoir son centre de gravité placé au point P de l'axe AP; son moment, par rapport au point A, est donc $kxyds$. Ainsi, en nommant D la distance du centre de gravité de la superficie décrite par AM au point A, on aura, $D \times \int kyds = \int kxyds$, et $D = \frac{\int xyds}{\int yds}$.

Par exemple, soit AM un arc de cercle dont le rayon $= a$. On aura, $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, $ds = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$), $\int yds = ax$, $\int xyds = \frac{ax^2}{2}$. Donc $D = \frac{x}{2}$.

Le centre de gravité d'une zone sphérique quelconque est donc au milieu de la fleche.

VI. PROBLÈME IV. *Supposons que l'arc* AM (Fig. 191), *au lieu de faire une révolution entiere, comme dans l'article précédent, ne fasse que la* $\frac{1}{n}$ *partie d'une révolution : trouver le centre de gravité de la superficie* AMM′ *qu'il engendrera.*

Qu'on mene, suivant l'axe AP, le plan APSN, qui divise la surface AMM′ en deux parties égales et semblables; ce plan contiendra les centres de gravité de toutes les zones élémentaires MSM′msm', dont la surface AMM′ est composée, et par conséquent aussi le centre de gravité de cette surface elle-même. Soient dans ce plan, V le centre de gravité de l'arc MSM′, G celui de la surface AMM′; et menons à l'axe AP les perpendiculaires VP, GK. On aura (96) $AMM' \times GK = \int MSM' \times Mm \times VP$. Or, si l'on tire la corde MM′, et qu'on nomme $\frac{m}{1}$ le rapport connu de cette corde au rayon PS ou PM; on aura (109), $MSM' \times VP =$

$MM' \times PM = m \times (PM)^2$. Donc $AMM' \times GK = m \int Mm \times (PM)^2 = m \int yyds$; et $GK = \frac{m \int yyds}{AMM'}$.

On connoîtra donc la distance du centre de gravité G à l'axe AP. Reste à trouver la position du point K. Or il est aisé de voir que ce point est le centre de gravité de la superficie, qui seroit produite par une révolution entiere de l'arc AM autour de AP; car si on imagine que cette superficie est partagée en une infinité de *pans* par des plans menés suivant l'axe AP, et faisant entre eux des angles égaux, tous ces pans égaux auront leurs centres de gravité placés sur la circonférence d'un cercle perpendiculaire à l'axe AP. Donc le centre de gravité de leur système sera placé dans cet axe : donc, réciproquement, si, par le point K supposé le centre de gravité de la superficie produite par une révolution entiere de l'arc AM, on mene un plan circulaire perpendiculaire à AP, il contiendra le centre de gravité d'une partie quelconque AMM' de cette même superficie. Connoissant donc la position du point K par l'article précédent, on a tout ce qu'il faut pour trouver le centre de gravité G de la superficie AMM'.

Par exemple, soit AM un arc de cercle dont le rayon $= a$. On aura, $AMM' = \frac{ka.x}{n}$, $\int yyds = \int adx \sqrt{(2ax - xx)}$, qui est l'expression de l'aire du segment APM multiplié par le rayon a. Donc $GK = \frac{m.n.APM}{kx}$; d'un autre côté, on a, par l'article précédent, $AK = \frac{x}{2}$.

Que APM soit un quart-de-cercle qui fasse un quart de révolution. On aura, $m = \sqrt{2}$, $n = 4$, $x = a$, $APM = \frac{kaa}{8}$. Donc $GK = \frac{a}{\sqrt{2}}$, et $AK = \frac{a}{2}$.

VII. PROBLÊME V. *Trouver le centre de gravité du solide, produit par la révolution de l'aire* APM (Fig. 190) *autour de* AP.

Le centre de gravité cherché est placé dans l'axe AP. De plus le cylindre élémentaire, produit par la révolution du petit trapeze PMmp, peut être censé avoir son centre de gravité placé en P. Or ce cylindre a pour valeur, $\frac{ky^2dx}{2}$; son moment, par rapport au point A, est donc $\frac{kxy^2dx}{2}$. Soit D la distance du centre de gravité du solide fini, produit par APM, au point A; on aura, $D \times \int\frac{ky^2dx}{2} = \int\frac{kxy^2dx}{2}$, et par conséquent $D = \frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx}$.

Par exemple, soit APM un segment de cercle, dont le rayon $= a$. On aura, $\int y^2dx = \int dx(2ax - xx) = ax^2 - \frac{x^3}{3}$, $\int xy^2dx = \int xdx(2ax - xx) = \frac{2ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}$. Donc $D = \frac{8ax - 3x^2}{4(3a - x)}$.

VIII. Problême VI. *Supposons que le segment* APM (Fig. 191) *ne fasse que la* $\frac{1}{n}$ *partie d'une révolution autour de* AP; *trouver le centre de gravité de l'espece d'onglet* APMSM'A *qu'il engendrera.*

Ayant mené, suivant l'axe AP, le plan APSN, qui partage l'onglet en deux parties égales et semblables, et qui contient par conséquent son centre de gravité et celui de ses éléments PMSM'$m'smp$; nous supposerons que G soit le centre de l'onglet, V celui du petit prisme PMSM'$m'smp$; et nous menerons à l'axe AP les perpendiculaires VP, GK. De plus, nous tirerons la corde MM'; et nous nommerons, comme ci-dessus, m le rapport de cette corde au rayon PM. Cela posé, on aura (en nommant O l'onglet), $O \times GK = \int\left(\frac{PM \times MSM'}{2} \times Pp \times VP\right)$. Or (111), $VP = \frac{2MM' \times PM}{3MSM'}$; donc $O \times GK = m\int\frac{(PM)^3 \times Pp}{3}$, ou bien $GK \times \int\frac{kyydx}{2n} = m\int\frac{y^3dx}{3}$, et $GK = \frac{2mn}{3} \times \frac{\int y^3dx}{\int kyydx}$.

Quant à la position du point K, elle se détermine par l'article précédent, en considérant que ce point est nécessairement le centre de gravité du solide produit par une révolution entiere de l'aire APM autour de AP.

Par exemple, soit APM un segment de cercle, dont le rayon $= a$. On aura, $\int kyydx = \int k(2ax - xx)dx = kax^2 - \frac{kx^3}{3}$; $\int y^3 dx = \int dx(2ax - xx)^{\frac{3}{2}} = -\frac{(a-x)(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3aa}{4} \times \int dx\sqrt{(2ax - xx)}$. Ainsi $GK = \frac{2mn}{3} \times \ldots\, \frac{9aa\int dx\sqrt{(2ax-xx)} - 3(a-x)(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}{4(3kax^2 - kx^3)}$; et par l'article précédent, $AK = \frac{8ax - 3x^2}{4(3a-x)}$.

Que APM soit un quart-de-cercle qui fasse un quart de révolution. On aura, $m = \sqrt{2}$, $n = 4$, $x = a$, $\int dx\sqrt{(2ax - xx)} = APM = \frac{kaa}{8}$; et par conséquent $GK = \frac{3a}{4\sqrt{2}}$, $AK = \frac{5}{8}a$.

IX. Les mêmes principes servent à déterminer les centres de gravité des superficies ou des solides, qu'on ne peut pas regarder comme engendrés par la révolution d'une courbe. Mais alors il faut considérer les moments par rapport à trois plans donnés de position dans l'espace, et chercher les distances du centre de gravité à chacun de ces plans, qu'il convient de supposer perpendiculaires entre eux, pour parvenir à des résultats plus simples. La méthode est à cet égard la même que celle qui a été employée (69) pour trouver la position du centre de plusieurs forces paralleles.

NOTE II. STAT. CHAP. III. PAGE 104.

Maniere de trouver la courbure d'une chaînette attachée par ses extrémités à des points mobiles.

I. Dans le courant de l'article 158, j'ai regardé les chaînes d'un pont-levis comme des lignes droites ; mais, à la rigueur, elles s'écartent de la direction rectiligne, et on peut être curieux de connoître la nature de la courbe qu'elles forment réellement. Les différentes solutions qu'on a données jusqu'ici du probléme des *chaînettes* supposent que les extrémités de la corde soient attachées à des points fixes. Ici, les points d'attache sont mobiles, et prennent la position que demande l'équilibre des forces qui agissent sur la corde.

II. Problême I. *Déterminer la nature de la courbe* GVE (Fig. 192) *que forme une corde parfaitement flexible, attachée par ses extrémités aux deux points* G *et* E *de deux leviers* GM, EA, *qui sont mobiles autour des points fixes* K, A, *et qui sont chargés des poids* F, B, T.

Supposons que tout le systéme soit parvenu à l'état d'équilibre : il est clair qu'alors les deux points G et E peuvent être regardés comme fixes. Qu'on mene l'axe horizontal KX, et les deux ordonnées infiniment voisines VS, *us*, à cet axe. Par les points extrêmes G, E de la courbe, et le point V, soient menées les tangentes GN, EN, VQ, dont les deux premieres se rencontrent en N, la premiere et la troisieme en Q ; et soient élevées les verticales GO, EX, NP, QR.

Nommons
- l'abscisse KS . . . . x,
- sa différentielle Ss ou Vh . . . . . dx,
- l'ordonnée SV . . . . y,
- sa différentielle uh . . . . dy,
- l'arc funiculaire GV . . . . s,
- sa différentielle Vu . . . . ds,
- le poids du même arc GV . . . . . Q,
- la tension de la corde suivant GQ. . . f,
- l'angle GQR que fait la direction de cette force avec la verticale . . . θ,
- le sinus total . . . . 1.

Cela posé, il est clair (133) qu'on aura la proportion, Q ; f :: sin. GQV : sin. RQV. Or, 1°. l'angle GQV = ang. GQR + ang. RQV = ang. GQR + 180° — ang. Vuh, et par conséquent sin. GQV = sin. GQR. cos. (180° — Vuh) + cos. GQR × sin. (180° — Vuh) = sin. $\theta \times -\frac{dy}{ds}$ + cos. $\theta \times \frac{dx}{ds} = \frac{dx \cos. \theta - dy \sin. \theta}{ds}$. 2°. L'angle RQV = 180° — ang. Vuh, et sin. RQV = $\frac{dx}{ds}$. Nous aurons donc, Q : f :: $\frac{dx \cos. \theta - dy \sin. \theta}{ds} : \frac{dx}{ds}$; et par conséquent Q$dx$ = fdx cos. θ — fdy sin. θ, équation fondamentale de la courbe cherchée.

III. Corollaire I. Le poids Q est une quantité variable et dépendante de la position du point V. Mais les deux quantités f et θ n'en dépendent point, et doivent être regardées comme constantes pour tous les points de la courbe : elles sont seulement indéterminées pour le présent, et nous verrons ci-dessous la maniere de les déterminer. Considérons auparavant tout ce qui constitue la nature de notre courbe. Il peut arriver que Q soit une fonction, ou de x, ou de y, ou de s. Ces trois suppositions donnent pour GVE une courbe différente.

1°. Soit Q une fonction de x. L'équation fondamentale donnera, $dy = \frac{dx\,(f\cos.\,\theta - Q)}{f\sin.\,\theta}$, équation séparée, et immédiatement intégrable ou constructible.

2°. De même, si Q est une fonction de y, on aura, $dx = \frac{f dy\,\sin.\,\theta}{f\cos.\theta - Q}$, équation encore séparée.

3°. Soit Q une fonction de s. Mettons pour dx sa valeur $\sqrt{[ds^2 - dy^2]}$ dans l'équation fondamentale; elle deviendra, $fdy\,\sin.\,\theta = (f\cos.\,\theta - Q) \times \sqrt{[ds^2 - dy^2]}$; d'où l'on tire,

$$dy = \frac{ds\,(f\cos.\,\theta - Q)}{\sqrt{[f^2\sin.\,\theta^2 + (f\cos.\,\theta - Q)^2]}};$$

$$dx = \frac{ds\,(f\sin.\,\theta)}{\sqrt{[f^2\sin.\,\theta^2 + (f\cos.\,\theta - Q)^2]}}.$$

Ainsi on pourra construire la courbe, puisqu'on aura x et y en fonctions de la même variable s.

IV. COROLLAIRE II. Le cas le plus ordinaire dans la nature se rapporte à cette troisieme hypothese; c'est celui où la corde est uniforme dans sa grosseur. Alors on peut supposer $Q = s$, et la nature de la courbe peut s'exprimer par une équation séparée entre dx et dy. Car nos deux dernieres équations donnent, en ce cas, $\frac{ds\,(f\cos.\,\theta - s)}{dy} = \frac{ds\,(f\sin.\,\theta)}{dx}$; ou bien, $dx\,(f\cos.\,\theta - s) = dy\,(f\sin.\,\theta)$.

Différencions chaque membre de cette équation, en prenant dx pour constante; nous aurons, $-dxds = ddy\,(f\sin.\,\theta)$, ou bien $-dx = \frac{ddy\,(f\sin.\,\theta)}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$, ou bien $-dydx = \frac{dyddy\,(f\sin.\,\theta)}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$, dont l'intégrale est, $Adx - ydx = f\sin.\,\theta \times \sqrt{[dx^2 + dy^2]}$; équation d'où l'on tire aisément,

$$dx = \frac{dy\,(f\sin.\,\theta)}{\sqrt{[(A - y)^2 - f^2\sin.\,\theta^2]}}.$$

La constante A doit être telle, qu'au point G où l'ordonnée GO est censée donnée, le sinus de l'angle Vuh, qui

est toujours $\frac{dx}{ds}$, devienne $=$ sin. θ. Or, à cause de $ds =$ $\sqrt{[dx^2+dy^2]} = \sqrt{\left[dy^2 + \frac{dy^2(f \sin. \theta)^2}{(A-y)^2 - f^2 \sin. \theta^2}\right]} = \ldots$ $\frac{dy(A-y)}{\sqrt{[(A-y)^2 - f^2 \sin. \theta^2]}}$, on a généralement, $\frac{dx}{ds} = \frac{f \sin. \theta}{A-y}$. Donc, en faisant $y = GO = q$, quantité supposée donnée, et $\frac{dx}{ds} = \sin. \theta$, on aura, $\sin. \theta = \frac{f \sin. \theta}{A-q}$, et par conséquent $A = q + f$. Ainsi l'équation différentielle de la courbe est $dx = \frac{dy(f \sin. \theta)}{\sqrt{[(f+q-y)^2 - f^2 \sin. \theta^2]}}$, dont l'intégrale est $x = C -$ $f \sin. \theta$. L. $(f+q-y+\sqrt{[(f+q-y)^2 - f^2 \sin. \theta^2]}.)$

La constante C doit être telle, que $y = GO$ donne, $x = KO = \pi$, quantité supposée donnée; de sorte que $x = \pi + f \sin. \theta\, L. (f + f \cos. \theta) - f \sin. \theta \times L. (f+q-$ $y + \sqrt{[(f+q-y)^2 - f^2 \sin. \theta^2]})$, équation finie de la courbe.

V. Problème II. *Déterminer la relation de toutes les quantités qui constituent l'équilibre, en continuant de regarder la corde comme uniformément pesante.*

On raisonnera semblablement dans les autres suppositions.

Nous avons déja mené par le point K, donné de position, l'horizontale KX; menons de même par le point A, aussi donné de position, l'horizontale CAZ; abaissons la verticale KC, et prolongeons la verticale XE jusqu'en Z. Des points K et A tirons les perpendiculaires Kd, Ab sur les tangentes extrêmes NG, NE de la courbe. Conservons toutes les dénominations précédentes, et de plus,

Soient {
KG . . . . a,
AE . . . . b,
KI . . . . c,
KL . . . . g,
AH . . . . h,

Soient $\begin{cases} \text{KC} \ldots\ldots\ldots\ldots & m, \\ \text{AC} \ldots\ldots\ldots\ldots & n, \\ \text{la longueur entiere de la corde GVE} \ldots & p, \\ \text{l'angle GKO} \ldots\ldots\ldots & z, \\ \text{l'angle ZAE} \ldots\ldots\ldots & u. \end{cases}$

Il est clair que conséquemment à ces suppositions, on aura,

GO ou q . . . . $= a \sin z$,
KO ou π . . . . $= a \cos. z$,
EZ . . . . $= b \sin. u$,
AZ . . . . $= b \cos. u$,
CZ ou KX . . . . $= n + b \cos. u$,
EX . . . . $= m - b \sin. u$,
Kg . . . . $= c \cos. z$,
Ke . . . . $= g \cos. z$,
At . . . . $= h \cos. u$,
Kd . . . . $= a \cos. (z + \theta)$.

Cela posé, 1°. les forces appliquées au levier GKM étant en équilibre, on aura, comme dans l'article 158, $B \times Ke = f \times Kd + F \times Kg$, c'est-à-dire (A), $Bg \cos. z = fa \cos. (z + \theta) + Fc \cos. z$, premiere équation.

2°. Représentons par ϕ la tension de la corde suivant FN. L'équilibre du levier AE donnera, $T \times At = \phi \times Ab$, ou bien $Th \cos. u = \phi \times AE \times \sin. AEb$. Or (133), $\phi = \frac{f \times \sin. GNP}{\sin. ENP} = \frac{f \sin. \theta}{\sin. NEX}$; et, à cause que l'angle $AEb = 180° -$ ang. NEX $-$ ang. AEZ, on aura, $\sin. AEb = \sin. NEX. \cos. AEZ + \cos. NEX. \sin. AEZ$. Donc $\phi \times AE \times \sin. AEb = bf \sin. \theta \left(\cos. AEZ + \sin. AEZ. \frac{\cos. NEX}{\sin. NEX}\right)$. Or l'équation fondamentale (art. II) donne ici en général, $\frac{dy}{dx} = \frac{f \cos. \theta - s}{f \sin. \theta}$; et il est évident que $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos. NEX}{\sin. NEX}$, lorsque $s = p$. On aura donc, $\phi \times AE \times \sin. AEb = bf \sin. \theta \times \left(\sin. u + \cos. u \times \frac{(f \cos. \theta - p)}{f \sin. \theta}\right) = bf \sin. \theta \sin. u + bf \times \cos. \theta \cos. u - bp \cos. u = bf \cos. (\theta - u) - bp \cos. u$.

Mettant cette valeur dans l'équation $Th \cos. u = \phi \times AE \times \sin. AEb$, elle deviendra (B), $Th \cos. u = bf \cos. (\theta - u) - bp \cos. u$, seconde équation.

3°. L'équation fondamentale donne encore, $s = \ldots \frac{fdx \cos. \theta - fdy \sin. \theta}{dx} = f \cos. \theta - f \sin. \theta . \frac{dy}{dx}$, ou bien $\Big($en mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $\ldots \frac{\sqrt{[(f + a \sin. z - y)^2 - f^2 \sin. \theta^2]}}{f \sin. \theta}$ (IV)$\Big)$, $s = \cos. \theta - \sqrt{[(f + a \sin. z - y)^2 - f^2 \sin. \theta^2]}$. Donc, en faisant $s = p$, $y = EX = m - b \sin. u$, on aura (C), $p = f \cos. \theta - \sqrt{[(f + a \sin. z - m + b \sin. u)^2 - f^2 \sin. \theta^2]}$, troisieme équation.

4°. Enfin reprenons l'équation $x = \pi + f \sin. \theta L. (f + f \cos. \theta) - f \sin. \theta L. (f + q - y + \sqrt{[(f + q - y)^2 - f^2 \sin. \theta^2)]}$, ou bien $x = a \cos. z + f \sin. \theta L. (f + f \cos. \theta) - f \sin. \theta . L. (f + a \sin. z - y + \sqrt{[(f + a \sin. z - y)^2 - f^2 \sin. \theta^2]})$, trouvée (Art. IV); et considérons qu'à l'abscisse $KX = CZ = n + b \cos. u$, répond l'ordonnée $EX = m - b \sin. u$. Par-là nous formerons cette quatrieme équation, (D), $n + b \cos. u = a \cos. z + f \sin. \theta . L. (f + f \cos. \theta) - f \sin. \theta . L. (f + a \sin. z - m + b \sin. u + \sqrt{[(f + a \sin. z - m + b \sin. u)^2 - f^2 \sin. \theta^2]}$.)

Les quatre équations (A), (B), (C), (D), renferment toutes les quantités qui concernent l'équilibre de la corde avec les leviers mobiles aux extrémités desquels elle est attachée.

On doit remarquer que, dans ces équations, les poids B, F, T, sont censés exprimés par des lignes qui leur sont proportionnelles ; de même que le poids de la corde y est exprimé par la ligne p, égale à la longueur entiere de cette corde.

VI. Des différentes quantités qui entrent dans les équations proposées, celles qui sont relatives aux positions *données* des points K, A, et aux longueurs aussi *données* des lignes KG, KI, KL, AE, AH, sont données. Il y en a

seulement huit, savoir, f, θ, z, u, B, F, T, p, qui peuvent être indéterminées; et si on en connoît quatre, on parviendra à connoître les quatre autres, par la résolution des équations précédentes : ce qui donne lieu à différents problêmes. Si l'on regarde z, u, f, θ, comme les quatre inconnues, c'est-à-dire si, tout le reste étant donné, il s'agit de déterminer les positions des deux leviers, la quantité et la direction de la tension de la corde au point G : les calculs, quoique dépendants de l'analyse ordinaire, seront intraitables. Il en est de même dans d'autres cas. Il y a des questions qui donnent des résultats assez simples. Je ne m'étends pas davantage sur ce sujet, qui n'appartient plus qu'à l'analyse.

Le cas particulier où la corde seroit attachée à des points fixes, est un corollaire de cette théorie.

NOTE III. STAT. CHAP. III. PAGE 110.

Calcul numérique d'un Pont-levis.

I. Le calcul suivant est de feu C. Filley, lieutenant-général des armées de France, directeur des fortifications à Thionville, qui joignoit à toutes les connoissances qui forment un ingénieur du premier ordre la pratique la plus consommée.

Ce calcul est une application de la formule $T \times AH + C \times AE + F \times KI = B \times KL$ (Fig. 80), qui a été démontrée (161). Voici donc l'usage de cette formule dans la pratique.

II. Les points H, I, L, étant pris dans la direction du centre de gravité du système des parties qui composent le tablier, les fleches, et la bascule, on peut regarder le produit $T \times AH$ comme le moment du système de toutes les

parties qui composent le tablier, relativement à l'axe de ses tourillons; le produit $F \times KI$, comme le moment du systême de toutes les parties qui appartiennent aux fleches, par rapport à l'axe des tourillons de la bascule; et le produit $B \times KL$, comme le moment des parties de la bascule, relativement au même axe. On pourra donc, à la place de ces moments, substituer les sommes des moments particuliers qui leur sont égales. Pour faire cette substitution, nous supposerons, dans l'exemple qui suit, que toutes les parties du tablier ont été déterminées, en conséquence de son emplacement et de la solidité qu'on a cru devoir lui donner. Il en est de même des fleches et des branches de la bascule, ainsi que de toutes les ferrures. Il n'y aura donc de variable que les pieces d'assemblage de la bascule; on leur donnera des dimensions qui puissent satisfaire à l'équilibre, et qui seront déterminées comme on va le voir.

Nous ne nous attacherons pas dans les calculs suivants à une exactitude scrupuleuse, les petites parties qui seront négligées ne pouvant être d'aucune conséquence.

PARTIES QUI COMPOSENT LE TABLIER.

Premiere partie.

Le talon,	
longueur . . . $1^{t.}$ $4^{pi.}$ $11^{po.}$ } $2^{sol.}$ $0^{pi.}$ $3^{po.}$	
grosseur . . . $9^{po.}$ et $9^{po.}$ }	
$2^{sol.}$ $0^{pi.}$ $3^{po.}$ pesent, à raison de $210^{l.}$ par solive, ci . .	$429^{liv.}$
Deux frettes dont le talon est garni pesant ensemb.	24
Total du poids de cette premiere partie	$453^{liv.}$
Les tourillons étant placés à 3 pouces de la face intérieure du talon, la distance du centre de gravité de cette partie, ou son bras de levier, sera $1^{po.}\frac{1}{2}$, et son moment $453^{l.} \times 1^{po.}\frac{1}{2} =$	679

Les tourillons du tablier pesent ensemble .	$70^{l.}$
4 boulons pour les retenir	16
Les tourillons de la bascule	94
Deux platines appliquées aux faces des branches de la bascule pour recevoir lesdits tourillons	48
4 boulons servant à les fixer	23
4 boulons pour les tourillons	20

Ces parties ayant leurs centres de gravité dans l'axe des tourillons, n'ont point de moment relativement à cet axe. On ne donne ici leur poids que pour servir, si l'on vouloit, à calculer le frottement,

Seconde partie.

Sept gîtes chacune de $10^{pi.}$ $6^{po.}$ sans les tenons,

Longueur ens.	$12^{t.}$	1	$6^{po.}$	$7^{sol.}$ $0^{pi.}$ $10^{po.}$
Grosseur	6	et	7	

Le plancher entre la tête et le talon,

Longueur	$1^{t.}$	$4^{pi.}$	$6^{po.}$	$6^{sol.}$ $0^{pi.}$ $2^{po.}$
Largeur	1	4	4	
Épaisseur	0	0	2	

Le plancher de recouvrement,

Longueur	$2^{t.}$	$0^{pi.}$	$0^{po.}$	$1^{sol.}$ $5^{pi.}$ $0^{po.}$
Largeur	0	2	9	
Épaisseur	0	0	2	
Total				15 0 0

pesant ensemble		$3150^{liv.}$
14 goujons d'assemblage	$20^{l.}$	762
150 clous de 5 pouces pour les madriers, ci	18	
70 petites barres de rouage	492	
4 barres de recouvrement	192	
32 chevilles ou boulons à clavettes pour retenir lesdites barres	40	
Total du poids de cette partie		$3912^{liv.}$

Il est clair que le centre de gravité de cette partie est au centre de figure du tablier ; ainsi son bras de levier sera la moitié de la longueur des gîtes, plus 6po., ci . . . . 69po.

Et son moment		269928liv.

Troisieme partie.

La tête,

Longueur	1t. 4pi. 4po.	1sol. 5pi. 8po.	
Grosseur	9 et 9		
Pesant			407liv.
Deux frettes dont la tête est armée			24
Total du poids de cette partie			431liv.

Le centre de gravité de cette partie est éloigné de l'axe des tourillons de $136\frac{1}{2}$ pouces ; ainsi son moment sera 58831

Quatrieme partie.

Les gâches à charniere pour recevoir les chaînes	24l.	40
4 boulons à vis et écroux pour lesdites gâches	16	

Le centre de gravité de cette partie étant d'un pouce environ en dehors du tablier ; son bras de levier sera de 142 pouces, et son moment 5680

PARTIES QUI COMPOSENT LES FLECHES.

Quoique la diminution des fleches ne commence qu'à 6 pouces en avant des tourillons pour des raisons de solidité, nous les supposerons diminuées dans toute leur longueur, et nous les considérerons comme composées chacune d'un parallélépipede *a*, de deux prismes *b*, de deux prismes *c*, et de quatre pyramides *d* (Pl. XI, Fig. A.)

Premiere partie.

Les parallélépipedes *a*,

Longueur ensemb.	$3^{t.}$	$5^{pi.}$	$6^{po.}$	$4^{sol.}$ $2^{pi.}$ $5^{po.}$ pes. $925^{liv.}$	
Grosseur . . .		$9^{po.}$ et	$9^{po.}$		

Leur centre de gravité est au milieu de leur longueur; ainsi leur distance à l'axe des tourillons de la bascule est $70^{po.}\frac{1}{2}$, et leur moment relativement à cet axe 65212

Seconde partie.

Les prismes *b*,

Longueur	$1^{t.}$	$5^{pi.}$	$9^{po.}$	
Largeur ensemble .	0	0	3	$0^{sol.}$ $4^{pi.}$ $5^{po.}$
Hauteur	0	0	9	

Les prismes *c*,

Longueur	1	5	9	
Largeur ensemble .	0	0	4	0 5 10
Hauteur	0	0	9	
Total				1 4 3

Pesant ensemble 359

La distance du centre de gravité de cette partie étant le tiers de la longueur des fleches, sera de 47 pouces, et son moment ci 16873

Troisieme partie.

Les pyramides *d*,

Longueur . . .	$0^{t.}$	$0^{pi.}$	$2^{po.}$	
Largeur ensemble .	0	1	0	$0^{sol.}$ $1^{pi.}$ $4^{po.}$
Hauteur	0	3	11	

Pesant 47

La distance du centre de gravité de cette partie à l'axe des tourillons est le quart de la hauteur des pyramides ou de la longueur des fleches; elle sera donc de $35^{po.}\frac{1}{4}$, et son moment . . 1657

Quatrieme partie.

L'armure du bout des fleches pour porter les chaînes, pesant . . . . 105^{livs}

Le bras de levier de cette partie est égal à la longueur des fleches, 141$^{po.}$; ainsi son moment sera 14805

PARTIES QUI COMPOSENT LA BASCULE.

Premiere partie.

Les branches de la bascule,

Longueur ensemble	4$^{t.}$	2$^{pi.}$	0$^{po.}$	9$^{sol.}$ 2$^{pi.}$ 4$^{po.}$
Grosseur . . .	12	et	13	

Pesant 1972

Le bras de levier de cette partie est égal à la moitié de la longueur des branches ou de 78 pouces; ainsi son moment sera . . . . 153816.

Seconde partie.

Deux arganeaux placés au bout des branches pour recevoir les petites chaînes . . .	10$^{l.}$	86
Deux boulons pour les retenir	6	
Deux frettes pour le bout des branches . .	34	
Les deux petites chaînes de 9 pieds de longueur chacune	36	

Le bras de levier de cette partie est de 156 pouces, et son moment 13416

Troisieme partie.

Deux verroux	16$^{l.}$	36
4 crampons pour lesdits verroux	12	
Deux serrures à bosses	8	

Nous supposerons le bras de levier de cette partie de 120 pouces; son moment sera ci 4320

Quatrieme partie.

Cette partie doit comprendre les pieces d'assemblage de la bascule; mais leurs dimensions étant encore inconnues, nous appellerons leurs poids Z. Quoique l'on ne place pas toujours ces pieces symmétriquement autour du centre de figure, relativement à la longueur de la machine, on le supposera ici pour pouvoir connoître sans peine le centre de gravité; et l'on aura le bras de levier de cette partie en retranchant 6 pouces de la longueur des branches, et prenant la moitié du reste; on trouvera pour cette distance 75 pouces; ainsi le moment sera . . . . $Z \times 75$

LES CHAÎNES.

Le terme $C \times AE$ de l'équation n'a pas besoin d'être décomposé, puisque l'on connoît ses facteurs. Les chaînes ont chacune 31 mailles de 6 pouces environ de longueur, pesant $1^{l.}\frac{3}{7}$; ainsi le poids total sera . . . . $108^{liv.}$

AE est ici de 142 pouces; on aura donc pour $C \times AE$ 15336

Si l'on substitue maintenant aux termes de l'équation les quantités qui leur sont égales, telles qu'on vient de les trouver; on aura, $T \times AH = 679 + 269928 + 58831 + 5680 = 335118$; $C \times AE = 15336$; $F \times KI = 16873 + 65212 + 1657 + 14805 = 98547$; $B \times KL = 153816 + 13416 + 4320 + Z \times 75 = 171552 + Z \times 75$.

Formant ensuite l'équation en employant ces nouveaux termes, on trouvera pour la valeur de Z . . . . $3700^{liv.}$

C'est le poids des pieces d'assemblage de la bascule; on ne peut en faire la distribution qu'en tâtonnant.

Les trois entre-toises,							
Longueur ensemble .	4t.	2pi.	6po.	}	8sol.	4pi.	8po.
Grosseur	11	et	13				
Les deux potilles,							
Longueur ensemble .	1	3	6	}	2	5	5
Grosseur	11	et	12				
Les quatre guettes,							
Longueur ensemble .	3	2	0	}	6	0	8
Grosseur	11	et	12				
Total					17	4	9

Pesant ensemble . . . . 3736lir.

Ce poids total des pieces d'assemblage de la bascule ne differe de celui qu'exige l'équilibre que de 36l. ; et ces 36l. se réduisent à 18 environ, en les supposant appliqués au bout de la bascule. On a fait en sorte que le poids des pieces de la bascule fût ainsi un peu plus grand qu'il ne faut pour l'équilibre, afin qu'en ajoutant à cet excès une petite puissance, on surmonte le frottement, et que la machine prenne du mouvement.

Malgré tout le soin possible dans la construction d'un pont-levis, il arrive, au bout d'un certain temps, qu'il n'existe plus d'équilibre entre ses parties. La bascule isolée en l'air, exposée de tous côtés à la pluie, à la neige, au soleil, se desseche, s'altere, et perd de sa pesanteur. Il peut arriver à-peu-près la même chose au tablier, mais il a des barres de fer qui ne diminuent point de poids ; la pluie, la boue qu'y amenent les voitures, l'appesantissent, et alors l'équilibre se détruit. On y remédie ordinairement par une piece de bois mise en surcharge sur la derniere entre-toise de la bascule. Cette pratique a deux inconvénients considérables ; le premier, de faire frapper rudement le tablier contre le tableau de la porte ; et l'autre, de donner beaucoup de peine pour faire sortir la machine de sa position verticale. On en verra facilement la cause en faisant attention qu'à

proportion que le tablier s'approche du tableau, il perd de son bras de levier. La bascule en perd aussi, mais non pas autant, puisque la surcharge l'alonge sensiblement : voilà pourquoi la bascule gagne de la supériorité sur le tablier ; et c'est cette supériorité qu'il faut détruire avant que le poids du tablier n'aide à lever la bascule.

Le meilleur moyen de rendre l'équilibre à la machine est d'employer des madriers E de deux pouces d'épaisseur, disposés comme on le voit dans la Planche X, où ils sont placés au nombre de quatre ; on en met plus ou moins selon les cas. Ces madriers sont amovibles, et on s'en sert dans le besoin : alors on les accroche par le bout d'en haut à la premiere entre-toise, c'est-à-dire auprès du point d'appui de la machine ou des tourillons qui la portent, libres et détachés d'ailleurs sur toute leur longueur, qui est celle de la bascule ; de sorte qu'à mesure que le pont-levis s'éleve, et qu'il tire moins sur les fleches, l'effet de ces surcharges diminue aussi en proportion ; et, lorsque le pont-levis est vertical et ne tire plus, les surcharges cessent aussi entièrement de peser sur la bascule : elles recommencent à peser lorsque le pont-levis recommence à faire sentir son poids, etc.

On plaçoit autrefois aux deux côtés de la porte deux corbeaux en demi-cercle, dans lesquels tournoient les tourillons du tablier. Il arrivoit de là que le tablier étant parvenu à la situation verticale, l'effort de sa pesanteur étoit dirigé sur ces appuis et détruit par eux ; le poids de la bascule étoit également détruit par les appuis de ses tourillons ; les chaînes n'avoient dès-lors d'action sur les crochets des fleches qu'en vertu de leur poids ; et il pouvoit arriver qu'elles fussent détachées par quelques secousses, d'où s'ensuivoit de très fâcheuses conséquences. Il résultoit au moins de cette construction un grand inconvénient, dans la difficulté que l'on devoit trouver nécessairement pour faire sortir le tablier et la bascule de leur repos.

On place aujourd'hui les tourillons du tablier sur la face supérieure de son talon, à trois pouces du bord intérieur.

Il est aisé de voir que, dans cette position, lorsque le tablier devient vertical, la direction de sa pesanteur reste en-dehors d'environ quatre pouces ; en sorte qu'elle conserve toujours de l'action sur la bascule, et que la machine est toujours prête à prendre du mouvement, lorsque l'on détache les verroux de la bascule.

Si les genouilleres des chaînes étoient attachées de même sur la tête du pont-levis pour l'uniformité, elles ne pourroient, en le levant, l'obliger d'entrer dans son enclave contre les tableaux, sur-tout aux portes voûtées où cet enfoncement est couvert d'une plate-bande, d'une plinthe, etc. Il faut donc que les chaînes le prennent par-dessous.

Les crochets des cols de cicognes qui portent les chaînes se trouvent en-dessous du bout des fleches, et ne peuvent être autrement.

On voit la vérité de ces deux dernieres observations sur la Figure (Pl. XI) ; car il faudroit que les chaînes prissent la position courbe *mon*, au lieu de la position *rs*, ce qui ne peut pas arriver.

Enfin, l'on a supposé que le quadrilatere (1, 2, 3, 4) étoit un parallélogramme, ce qui n'est pas beaucoup contraire à la vérité, puisque, par sa position, la ligne (1, 2) se trouvant penchée au point 2 d'environ trois pouces, la ligne (4, 3) penche du même côté d'environ cinq pouces, et que ces lignes, à-peu-près paralleles, sont égales.

NOTE IV. DYN. LIV. I. CHAP. III. PAGE 221.

Formules générales du Mouvement varié, avec quelques applications.

I. Nous avons observé (304) que la force accélératrice ou retardatrice pouvant varier suivant une infinité d'especes de différentes lois, il y a conséquemment une infinité d'especes de mouvements variés : mais nous n'avons pas pu alors traiter cette théorie dans toute sa généralité, et nous nous sommes bornés à l'examen des propriétés du mouvement uniformément accéléré ou retardé. Voici maintenant les formules générales du mouvement varié ; celles du mouvement uniformément accéléré ou retardé n'en sont que des cas particuliers.

II. Rien ne se fait par saut dans la nature. Une quantité qui varie ne passe d'un état à l'autre que par tous les degrés possibles d'augmentation ou de diminution. Tel est l'ordre des variations des quantités géometriques ou algébriques. Les forces accélératrices ou retardatrices, les temps, les espaces, les vîtesses, et en général toutes les quantités que la mécanique considere, sont assujetties au même ordre. Ainsi les relations qui existent entre ces mêmes quantités peuvent être soumises à la géométrie et au calcul.

III. Quelle que soit la loi suivant laquelle varie continuellement une force accélératrice ou retardatrice, nous pouvons concevoir que, pour un instant quelconque, sa variation se fait au commencement ou à la fin de cet instant, et que par conséquent la force dont il s'agit demeure constante

pendant la durée du même instant ; de sorte que si l'on imagine que cet instant soit divisé en une infinité d'éléments égaux, à la suite de ces éléments égaux répond une suite de petits coups égaux donnés par la force accélératrice ou retardatrice. D'où l'on voit que tout mouvement varié peut être regardé comme uniformément accéléré ou retardé, pendant un instant. Les formules du mouvement uniformément accéléré ou retardé auront donc lieu pour le mouvement varié en général, si l'on considere l'espace parcouru, et le temps employé à le parcourir, comme des quantités infiniment petites. Ainsi nous pourrions établir tout de suite les formules du mouvement varié, d'après les principes du chapitre III (IIe part. liv. I) ; mais je crois devoir présenter ici directement ces formules.

IV. Soient F la force accélératrice ou retardatrice absolue qui anime un corps ; m la masse de ce corps ; s l'espace qu'il parcourt pendant le temps t ; u sa vîtesse à la fin de ce temps. On aura d'abord l'équation $F dt = \pm m du$, le signe $+$ étant pour le cas où la force F est accélératrice, et le signe $-$, pour le cas où elle est retardatrice. En effet, puisque la force F est toujours agissante, et qu'elle donne une infinité de petits coups au mobile durant chaque instant, il est clair que cette force, multipliée par la durée de son application, doit être proportionnelle à la petite quantité de mouvement qu'elle produit ou qu'elle détruit, c'est-à-dire au produit de la masse par l'incrément ou le décrément de la vîtesse.

V. L'équation $F dt = \pm m du$ donne, $\frac{F}{m} dt = \pm du$. Soit $\frac{F}{m} = \phi$; on aura, $\phi\, dt = \pm du$. Dans cette formule, ϕ est la force accélératrice ou retardatrice simple, ou, ce qui revient au même, la force qui presse la masse regardée comme l'unité.

VI. La vîtesse u ne varie d'un instant à l'autre que d'une quantité infiniment petite. Ainsi, pour un espace infiniment petit ds, supposé parcouru pendant le temps infiniment petit dt, la vîtesse peut être censée uniforme. Donc, par la nature du mouvement uniforme, on a, $u = \frac{ds}{dt}$.

VII. De cette équation $u = \frac{ds}{dt}$, on tire $dt = \frac{ds}{u}$. Mettons cette valeur de dt dans l'équation $\phi dt = \pm du$; et nous aurons $\frac{\phi ds}{u} = \pm du$, ou $\phi ds = \pm u du$.

VIII. La même équation $u = \frac{ds}{dt}$, donne encore $du = \pm \frac{dds}{dt}$, en regardant dt comme constant. Substituons cette valeur de du dans l'équation $\phi dt = \pm du$, et nous aurons, $\phi dt = \pm \frac{dds}{dt}$, ou $dds = \pm \phi dt^2$.

IX. Si, en différenciant l'équation $u = \frac{ds}{dt}$, nous prenons ds pour constant, nous aurons, $du = -\frac{dsddt}{dt^2}$; donc $\phi dt = \mp \frac{dsddt}{dt^2}$, et $ds = \mp \frac{\phi dt^3}{ddt}$, ou $dsddt = \mp \phi dt^3$.

X. Si on vouloit qu'aucune différentielle ne fût constante, on auroit, $du = \frac{dtdds - dsddt}{dt^2}$, et $\phi dt^3 = \pm (dtdds - dsddt)$.

Telles sont les formules générales du mouvement varié. On en va montrer l'usage.

XI. Toutes les questions que l'on peut proposer sur le mouvement varié sont réductibles à deux classes. Ou la nature de la ligne que le mobile décrit est donnée; et alors il s'agit simplement de trouver les expressions de la vîtesse, du temps, etc.; ou bien il faut trouver, d'après quelque

condition donnée, la nature de la courbe que le mobile décrit, et tout ce qui est relatif à son mouvement. Commençons par des problêmes du premier genre.

XII. PROBLÊME I. *Un corps* A (Fig. 193) *descendant verticalement par sa pesanteur vers le centre* C *de la terre, trouver la vîtesse qu'il aura en un endroit quelconque* P, *et le temps qu'il aura employé à parcourir l'espace* AP.

Ici la ligne décrite par le mobile est droite; et, en nommant g la gravité; u la vîtesse en P; s l'espace parcouru AP; t le temps employé à le parcourir, on aura d'abord (Art. VII), $udu = gds$, dont l'intégrale est $\frac{uu}{2} = gs$; donc $u = \sqrt{2gs}$. Je n'ajoute point de constante, parceque je suppose qu'en A où s est zéro, u soit aussi zéro.

Pour avoir l'expression du temps, mettons pour u sa valeur dans l'équation $dt = \frac{ds}{u}$, et nous aurons $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gs}}$, dont l'intégrale est $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$

Suivant l'expérience, un corps grave tombe, pendant la premiere seconde, de 15 pieds 1 pouce de hauteur, ou plus exactement de 15,1 pieds. D'où il résulte (317) qu'il acquiert une vîtesse capable de lui faire parcourir uniformément 30,2 pieds en une seconde. Faisant donc $g = 30,2$ pieds, les valeurs de u et de t deviendront, $u = 2\sqrt{(s. 15 \text{ pieds}, 1)}$, $t = 1' \times \sqrt{\left(\frac{s}{15, 1 \text{ pi.}}\right)}$. D'où l'on voit que la valeur de u exprime un certain nombre de pieds parcourus uniformément en une seconde, et que celle de t exprime un certain nombre de secondes.

XIII. PROBLÊME II. *Le corps* A *étant attiré vers le centre* C *par une force qui soit à chaque instant comme une puissance quelconque* n *de la distance de ce corps au centre* C, *on demande la vîtesse qu'il aura en un endroit quelconque* P, *et le temps employé à parcourir* AP.

La ligne décrite par le mobile est encore droite. Soient φ l'attraction sous l'unité de masse, ou le rapport de l'attraction absolue exercée sur toute la masse du corps à cette même masse ; a, la droite entiere AC ; s, l'espace parcouru AP ; u, la vîtesse en P ; t, le temps employé à parcourir AP. De plus, supposons qu'à une distance donnée b du centre, l'attraction soit égale à la gravité ordinaire g, afin de rapporter le mouvement que nous cherchons à celui des corps qui tombent librement par la pesanteur. On aura, par hypothese, $\varphi = \frac{g(a-s)^n}{b^n}$; donc $u\,du = \frac{g(a-s)^n}{b^n}.\,ds$, dont l'intégrale est $\frac{uu}{2} = A - \frac{g(a-s)^{n+1}}{(n+1)\,b^n}$. La constante A doit être telle que $s = 0$ donne, $u = 0$. Donc $A = \frac{ga^{n+1}}{(n+1)\,b^n}$, et $u = \sqrt{\left[\frac{2g(a^{n+1}-(a-s)^{n+1})}{(n+1)\,b^n}\right]}$.

On voit par-là que la vîtesse u est à la vîtesse qui auroit été acquise en vertu de la gravité g, par le même espace s, et qui auroit $\sqrt{(2gs)}$ pour expression, comme . . $\sqrt{\left[\frac{a^{n+1}-(a-s)^{n+1}}{(n+1)\,b^n}\right]}$ est à $\sqrt{s}$.

L'expression générale que nous avons trouvée pour u est susceptible d'une infinité d'applications particulieres, selon les différentes valeurs qu'on donnera à l'exposant n. Il n'y a qu'un seul cas qui puisse faire quelque difficulté ; c'est celui où l'on auroit $n = -1$; car alors la valeur trouvée pour u n'apprend rien. Mais, en remontant à l'équation différentielle $u\,du = \frac{g(a-s)^n\,ds}{b^n}$, on a, $u\,du = \frac{gb\,ds}{a-s}$, dont l'intégrale est $\frac{uu}{2} = A - gb.\,L.\,(a-s) = gb.\,L.\,a - gb \times L.\,(a-s)$, en déterminant la constante A de maniere que $s = 0$ donne, $u = 0$. Donc $u = \sqrt{\left[2gb.\,L.\,\frac{a}{a-s}\right]}$.

L'équation différentielle du temps $dt = \frac{ds}{u}$, devient, en

mettant pour u sa valeur générale . . . .
$dt = \frac{ds\sqrt{[(n+1)b^n]}}{\sqrt{[2g(a^{n+1}-(a-s)^{n+1})]}}$; d'où l'on tire la valeur de t, en intégrant, soit exactement, soit au moins par approximation. Si n étoit $= -1$, on mettroit dans l'équation $dt = \frac{ds}{u}$, pour u sa valeur relative à ce cas.

Supposons, pour faire quelque application de ces formules, que l'attraction soit réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances au centre C, ce qui est l'hypothese newtonienne. Alors on aura, $n = -2$; et l'équation différentielle du temps deviendra (en faisant $a - s = y$), $dt = \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{2g}} \times \frac{-y\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}} = \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{2g}} \times$ . . . . $\left(\frac{\frac{1}{2}a\,dy - y\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}} - \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}\right)$, dont l'intégrale est $t = A + \frac{\sqrt{a}.\sqrt{(ay-yy)}}{b\sqrt{2g}} - \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{2g}} \times \int \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}$. Or dans cette expression la partie $\int \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}$, est un arc de cercle dont a est le diametre, y le sinus verse; et, comme l'intégrale doit s'évanouir, lorsque $y = a$, il s'ensuit que si l'on nomme $\frac{C}{2}$ la demi-circonférence, toujours pour le diametre a, on aura, $A = \frac{C\sqrt{a}}{2b\sqrt{2g}}$. Donc le temps par AP $= \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{2g}}\left(\frac{C}{2} + \sqrt{(ay-yy)} - \int \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}\right)$; d'où l'on tire, en faisant $y = 0$, le temps total par AC $= \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{2g}} \times \frac{C}{2}$.

Qu'on demande, par exemple, dans la même hypothese, le temps qu'un boulet de canon mettroit à tomber de la lune jusqu'au centre de la terre, en le supposant soumis uniquement à l'attraction de la terre, réunie à son centre. Nous considérerons que, suivant les observations astronomiques, la distance moyenne de la lune à la terre est de 60 demi-diametres de la terre, dont chacun est à-peu-près de 3265859 toises. Ainsi AC ou $a = 60 \times 3265859$ toises $=$

19595140 toises; et la demi-circonférence $\frac{C}{2} = 19595140 \times \frac{22}{2 \times 7} = 307923848$ toises, en nombre rond. De plus, puisque b est la distance à laquelle l'attraction est égale à la gravité ordinaire g, on aura, $b =$ au rayon de la terre $=$ 3265859 toises. Maintenant, pour trouver le temps cherché t, il faudra le comparer au temps que mettroit le boulet de canon à tomber de la lune au centre de la terre, s'il étoit animé continuellement d'une pesanteur constante et égale à la gravité g. Or, si l'on nomme T ce dernier temps, on a, $T = \sqrt{\frac{2AC}{g}}$. Donc $t : T :: \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{2g}} \times \frac{C}{2} : \sqrt{\frac{2AC}{g}} :: \frac{C}{2} : 2b$; et par conséquent $t = T \times \frac{C}{4b} = T \times \frac{307923848}{6531718}$. Or $T = 1'' \times \sqrt{\frac{AC}{15 \text{ pieds}}} = 1'' \times \sqrt{78380616} = 8853'', 28278$, à-peu-près. Donc enfin $t = 8853'', 28278 \times \frac{307923848}{6531718} = 4^{\text{jours}}\ 20^{\text{heures}}\ 12'\ 36''$, environ.

XIV. PROBLÊME III. *Supposons que les temps de la descente d'un corps* A *vers le centre* C *soient comme une puissance quelconque de la distance du corps au centre : on demande la loi de la pesanteur.*

La ligne décrite par le mobile est toujours droite. Nommons AC, a; AP, s; la pesanteur cherchée, ϕ; le temps par AP, t; l'exposant de la distance du corps au centre, n. On aura (Hyp.), $t = \frac{\theta(a-s)^n}{k^n}$, θ étant un temps donné, k une ligne donnée. Donc, en regardant ds comme constant, on aura (Art. IX), $\phi\, dt = -\frac{ds\, ddt}{dt^2}$, ou $\phi = -\frac{ds\, ddt}{dt^3} = \frac{k^{2n} . n(n-1).(a-s)^{n-2} ds^3}{\theta^2 . n^3 (a-s)^{3n-3} ds^3} = \frac{k^{2n}.(n-1).(a-s)^{1-2n}}{\theta^2 . n^2}$.

D'où l'on voit que la pesanteur sera comme une puissance dont l'exposant est $1 - 2n$.

Pour avoir l'expression de la vîtesse du corps arrivé en P,

on mettra dans l'équation $udu = \varphi ds$, à la place de φ sa valeur ; et on trouvera la valeur de u, par l'intégration.

XV. Remarque. Nous n'avons considéré dans les trois articles précédents que des mouvements rectilignes. Supposons maintenant qu'un corps M (Fig. 194), soumis à l'action de la pesanteur ordinaire, descende le long d'une courbe BMD, qu'il faut regarder comme un petit canal que le corps est obligé de suivre. Qu'on mene à volonté la verticale DA, qu'on prendra pour l'axe des abscisses. Soit Mm un élément de la courbe ; et soient menées à l'axe DA les ordonnées perpendiculaires PM, pm. Prenons, suivant la direction verticale de la pesanteur du corps, la droite MQ pour représenter cette force ; et décomposons-la en deux autres MZ, MV, l'une perpendiculaire, l'autre tangente à la courbe : il est clair que la force MZ est détruite par la résistance du canal, et que le corps est accéléré le long de Mm, seulement en vertu de la force MV. Soit le point fixe A, pris à volonté sur AD, l'origine des abscisses; nommons AP, x; Pp ou Rm, dx; MP, y; MR, dy; Mm, ds; la gravité, g; la vitesse suivant Mm, u. On aura, Force $MV = g \times \frac{MV}{MQ} = g \times \frac{mR}{Mm} = \frac{gdx}{ds}$. Donc, en mettant pour φ cette valeur dans l'équation formulaire $udu = \varphi ds$ de l'art. VII, on aura, $udu = \frac{gdx}{ds} \times ds = gdx$. D'où l'on voit que la vitesse s'accélérera le long de l'élément Mm, de la même maniere que si le corps tomboit par la petite verticale correspondante Pp. Par conséquent si les deux points B et A sont placés à même hauteur, c'est à-dire aux extrémités d'une même ligne horizontale BA, le corps, après avoir parcouru l'espace quelconque BM, aura, suivant la direction de l'élément Mm, une vitesse exprimée par $\sqrt{(2gx)}$, qui est la même qu'il auroit en P, suivant la direction AP, s'il étoit tombé librement de la hauteur AP; et cela, quelle que puisse être la nature de la courbe BMD.

Appliquons ce principe général à un exemple.

XVI. PROBLÈME IV. *Soit la courbe* BMD *un arc de cercle, qu'on peut regarder comme décrit par un pendule qui oscille autour du centre* C *de ce cercle; et supposons qu'il faille trouver le temps* t *employé à parcourir l'arc* BMD.

Nommons a le rayon CD; h la hauteur donnée AD; x l'abscisse DP, qui répond à l'arc DM; u la vitesse du corps en M. On aura, $u=\sqrt{(2g.\,AP)}=\sqrt{[2g(h-x)]}$; Mm ou $ds=\frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; et $dt=\frac{ds}{u}=$

$$\frac{-adx}{\sqrt{(2ax-xx)}.\sqrt{[2g.(h-x)]}}=\frac{-a}{\sqrt{2g}}\times\frac{dx}{\sqrt{(hx-xx)}.\sqrt{(2a-x)}},$$

différentielle négative, parceque t augmentant, x diminue. Je réduis le facteur $\frac{1}{\sqrt{(2a-x)}}$ en série; ce qui donne,

$$dt=\frac{-adx}{\sqrt{2g}.\sqrt{(hx-xx)}}\times\left((2a)^{-\frac{1}{2}}+\frac{(2a)^{-\frac{3}{2}}x}{2}+\frac{3(2a)^{-\frac{5}{2}}x^2}{8}+\frac{5(2a)^{-\frac{7}{2}}x^3}{16}+\text{etc.}\right),$$ ou bien

$$dt=\frac{-\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}.\frac{dx}{\sqrt{(hx-xx)}}.\left(1+\frac{x}{4a}+\frac{3x^2}{32a^2}+\frac{5x^3}{128a^3}+\text{etc.}\right).$$

Il ne s'agit plus, pour avoir t, que d'intégrer les différentielles $\frac{dx}{\sqrt{(hx-xx)}}$, $\frac{xdx}{\sqrt{(hx-xx)}}$, $\frac{x^2dx}{\sqrt{(hx-xx)}}$, $\frac{x^3dx}{\sqrt{(hx-xx)}}$, etc. Or,

1°. L'intégrale de $\frac{dx}{\sqrt{(hx-xx)}}$ exprime le rapport d'un arc de cercle qui a h pour diametre, x pour sinus verse, au rayon $\frac{h}{2}$. Nous désignerons cette intégrale à l'ordinaire par $\int\frac{dx}{\sqrt{(hx-xx)}}$.

2°. On a, $d\sqrt{(hx-xx)}=\frac{\frac{1}{2}hdx-xdx}{\sqrt{(hx-xx)}}$; et par conséquent $\int\frac{xdx}{\sqrt{(hx-xx)}}=\frac{1}{2}h\int\frac{dx}{\sqrt{(hx-xx)}}-\sqrt{(hx-xx)}$.

3°. On a, $d[x\sqrt{(hx-xx)}]=dx\sqrt{(hx-xx)}+\frac{\frac{1}{2}hxdx-xxdx}{\sqrt{(hx-xx)}}=\frac{\frac{3}{2}hxdx}{\sqrt{(hx-xx)}}-\frac{2x^2dx}{\sqrt{(hx-xx)}}$; et par consé-

quent $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(hx-xx)}} = \frac{3}{4} h \int \frac{xdx}{\sqrt{(hx-xx)}} - \frac{x\sqrt{(hx-xx)}}{2} = \frac{5}{8} h^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(hx-xx)}} - \frac{3}{4} h \sqrt{(hx-xx)} - \frac{x\sqrt{(hx-xx)}}{2}$.

4°. On a, $d[x^2 \sqrt{(hx-xx)}] = 2xdx\sqrt{(hx-xx)} + \frac{\frac{5}{2} hx^2\, dx - x^3\, dx}{\sqrt{(hx-xx)}} = \frac{\frac{5}{2} h x^2\, dx}{\sqrt{(hx-xx)}} - \frac{3x^3\, dx}{\sqrt{(hx-xx)}}$; et par conséquent $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(hx-xx)}} = \frac{5}{6} h \int \frac{xxdx}{\sqrt{(hx-xx)}} - \frac{x^2\sqrt{(hx-xx)}}{3} = \frac{5}{16} h^3 \int \frac{dx}{\sqrt{(hx-xx)}} - \frac{5}{8} h^2 \sqrt{(hx-xx)} - \ldots \frac{5hx\sqrt{(hx-xx)}}{12} - \frac{x^2\sqrt{(hx-xx)}}{3}$.

Ainsi de suite, si on vouloit pousser plus loin la série qui doit exprimer la valeur de t.

Maintenant, comme on demande le temps employé à parcourir l'arc entier BMD, nous observerons que l'expression de t doit être telle qu'elle s'évanouisse, lorsque $x = h$, et qu'elle reçoive sa valeur complete, lorsque $x = 0$. Or, quand $x = h$, on a, $\sqrt{(hx-xx)} = 0$, $\int \frac{dx}{\sqrt{(hx-xx)}} = \frac{\varpi}{1}$, rapport de la circonférence au diametre; et quand $x = 0$, on a, $\sqrt{(hx-xx)} = 0$, $\int \frac{dx}{\sqrt{(hx-xx)}} = 0$. D'où il résulte qu'on aura, $\text{T.BMD} = \frac{\varpi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} \cdot \left(1 + \frac{h}{8a} + \frac{9h^2}{256a^2} + \frac{25h^3}{2048a^3} + \text{etc.}\right)$.

Telle est la durée d'une demi-oscillation, ou du temps employé à parcourir l'arc BMD; par conséquent la durée d'une oscillation entiere, ou du temps employé à parcourir l'arc BMDb, sera $\frac{\varpi\sqrt{a}}{\sqrt{g}} \cdot \left(1 + \frac{h}{8a} + \frac{9h^2}{256a^2} + \frac{25h^3}{2048a^3} + \text{etc.}\right)$.

Lorsque les oscillations sont fort petites, et que par conséquent il est permis de négliger tous les termes qui contiennent h, elles sont isochrones entre elles, puisque la durée de chacune d'elles est alors exprimée par $\frac{\varpi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, quantité qui, ne contenant plus h, sera toujours la même, quelle que soit l'amplitude de l'oscillation, pourvu néanmoins que

cette amplitude soit toujours fort petite. Ce résultat s'accorde avec l'article 402.

La même expression $\frac{\varpi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$ peut servir à déterminer la longueur d'un pendule qui fait de petites oscillations, lorsqu'on connoît la durée de chacune d'elles. Car que cette durée soit, par exemple, d'une seconde : on aura, $1'' = \frac{\varpi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, et par conséquent $a = \frac{g}{\varpi^2}$. Mettant pour g sa valeur 30$^{pi.}$, 2, qui est l'espace qu'un corps grave parcourroit uniformément en une seconde, en vertu de la vitesse qu'il auroit acquise s'il étoit tombé librement pendant une seconde ; mettant aussi pour ϖ sa valeur $\frac{355}{113}$: on trouvera, $a = 3$ pieds 8 lignes, 625. Le pendule qui bat les secondes doit donc avoir 3 pieds 8 $\frac{1}{2}$ lignes environ de longueur, comme on l'a dit (404).

Si la longueur a du pendule étoit donnée, que la durée de chaque oscillation fût d'une seconde, et qu'il fallût déterminer g; on auroit, $g = a\pi^2$, expression du double de l'espace qu'un corps grave parcourt librement en tombant pendant une seconde. Cette maniere de déterminer g est la plus simple et la plus exacte qu'on puisse employer dans la pratique.

Je passe à des problêmes de la seconde classe dont il a été parlé (art. XI).

XVII. PROBLÊME V. *Que la courbe* AMB (Fig. 195) *soit décrite par un mobile* M *lancé d'abord suivant une direction donnée, et attiré continuellement vers un point fixe* C *par une force proportionnelle à une fonction donnée de la droite variable* CM, *qu'on appelle* rayon vecteur : *il s'agit de trouver la nature de cette courbe, et tout ce qui est relatif au mouvement du corps* M.

Soit Mm un élément de la courbe, et dans son prolongement la petite droite égale mn, que le mobile décriroit dans un instant égal à celui qu'il a employé à parcourir Mm, si,

étant arrivé en m, il étoit abandonné à lui-même; mais supposons qu'à cause de la force centrale qui le pousse sans cesse vers le point C, il soit ramené de n en z suivant la direction nC, de sorte que mz soit l'élément consécutif à Mm. Ayant mené les droites CM, Cm, soient abaissées les petites perpendiculaires Mf, mk sur Cm et Cn. Du point C soit décrit, avec le rayon constant et donné CQ, l'arc Qqr; et soit abaissée la perpendiculaire CP sur la tangente mMP. Enfin, par les points m et n soient menées, parallèlement à Mf, et à mC, les droites mu, nu; ce qui donne le triangle mnu parfaitement égal au triangle mMf.

Cela posé, nommons CQ, 1; le petit arc Qq, dx; CM, r; Mm, ds; CP, p; la vitesse suivant Mm, u; l'élément du temps, dt; la force centrale, ϕ, qui est une fonction donnée de r. On aura, $qr = dx + ddx$; $Mf = \frac{rdx}{1}$ ou rdx; $fm = dr$; $Cm = CM + d(CM) = r + dr$; $Cz = Cm + d(Cm) = (r + dr) + d(r + dr) = r + 2dr + ddr$; $\frac{CP \times Mm}{2} = \frac{CM \times Mf}{2}$, ou $pds = rrdx$; $u = \frac{ds}{dt}$; et par l'article VIII, le petit espace $nz = \phi dt^2$, dt étant constant.

Les triangles CMf, nhu, qu'on peut regarder comme semblables, donnent, $Cf(r) : Mf(rdx) :: nu(dr) : hu = drdx$; et par conséquent $mh = mu - hu = rdx - drdx$. Or, $\frac{mh}{Cm} = \frac{qr}{Cq}$, c'est-à-dire $\frac{rdx - drdx}{r + dr} = \frac{dx + ddx}{1}$: on aura donc, $2drdx + rddx = 0$, ou bien $\frac{2dr}{r} = -\frac{ddx}{dx}$, dont l'intégrale, est $L.r^2 = L.Cdt - L.dx = L.\frac{Cdt}{dx}$, C étant une constante que nous déterminerons tout-à-l'heure. En passant aux nombres, on aura, $dt = \frac{r^2dx}{C}$; équation qui fait voir en général que le temps est toujours proportionnel à l'aire du secteur compris entre deux rayons vecteurs et l'arc de la courbe, quelle que puisse être la nature de cette courbe.

Si nous mettons pour dt sa valeur dans l'équation $u = \frac{ds}{dt}$, nous aurons, $u = \frac{C ds}{r^2 dx} = \frac{C ds}{p ds} = \frac{C}{p}$; d'où l'on voit que la vitesse en un point quelconque M de la courbe, est toujours réciproquement proportionnelle à la perpendiculaire abaissée du centre des forces sur la tangente MP.

Pour déterminer la constante C, supposons qu'au point A, pris pour origine de la courbe, le rayon vecteur $CA = f$, le sinus de l'angle que fait l'élément de la courbe avec $CA = h$, la vitesse initiale ou de projection $= m$: il est clair qu'on aura au point A, $ds = \frac{f dx}{h}$, $u = \frac{f dx}{h dt} = m$, et par conséquent $\frac{dx}{dt} = \frac{mh}{f}$. Mais, d'un autre côté, l'équation $dt = \frac{r^2 dx}{C}$; donne alors $\frac{dx}{dt} = \frac{C}{f^2}$. Ainsi on aura, $\frac{mh}{f} = \frac{C}{f^2}$; et par conséquent $C = fhm$. Donc en général $dt = \frac{r^2 dx}{fhm}$, $u = \frac{fhm}{p}$.

Les petites droites nu, nh, peuvent être regardées comme égales, et les triangles rectangles semblables Cmh, mkh donnent $\div Ck : mk : kh = \frac{(mk)^2}{Ck} = r dx^2$, en négligeant les infiniment petits des ordres suivants. Donc on aura, $Cn = Ck + kh + hn = r + dr + r dx^2 + dr = r + 2dr + r dx^2$; et par conséquent $nz = Cn - Cz = (r + 2dr + r dx^2) - (r + 2dr + ddr) = r dx^2 - ddr$. Mettant cette valeur de nz dans l'équation $nz = \varphi dt^2$, on aura, $r dx^2 - ddr = \varphi dt^2$, ou bien (en mettant pour dx sa valeur $\frac{fhm dt}{r^2}$), $\frac{f^2 h^2 m^2 dt^2}{r^3} - ddr = \varphi dt^2$, ou $\left(\frac{f^2 h^2 m^2}{r^3} - \varphi\right) dt^2 = ddr$, ou bien, en multipliant tout par dr, $\left(\frac{f^2 h^2 m^2 dr}{r^3} - \varphi dr\right) dt^2 = dr\, ddr$, dont l'intégrale est $\left(A - \frac{f^2 h^2 m^2}{2r^2} - \int \varphi dr\right) dt^2 = \frac{dr^2}{2}$; ce qui donne, $dt = \frac{r dr}{\sqrt{[2Ar^2 - f^2 h^2 m^2 - 2r^2 \int \varphi dr]}}$. Mettant pour dt

sa valeur $\frac{r^2 dx}{fhm}$, on aura, $dx = \frac{fhm\,dr}{r\sqrt{[2Ar^2 - f^2h^2m^2 - 2r^2\int\varphi dr]}}$; équation différentielle de la courbe cherchée AMB, entre l'angle et le rayon vecteur. Cette équation étant séparée, elle s'intégrera, ou algébriquement, ou par les quadratures, lorsque la fonction φ sera donnée.

La constante A se détermine, en observant qu'on a toujours $\frac{rdx}{dr} = \frac{fhm}{\sqrt{(2Ar^2 - f^2h^2m^2 - 2r^2\int\varphi dr)}}$. Or, au point A où $r = f$, il est clair que $\frac{fdx}{dr} = \frac{h}{\sqrt{(1 - hh)}}$; donc, si l'on suppose en ce même point A, $\int\varphi dr = N$, quantité donnée, on aura l'équation, $\frac{h}{\sqrt{(1-hh)}} = \frac{fhm}{\sqrt{(2Af^2 - f^2h^2m^2 - 2f^2N)}}$, de laquelle on tire, $A = \frac{m^2}{2} + N$.

XVIII. PROBLÈME VI. *Trouver la nature de la courbe* AMB (Fig. 196), *qui est parcourue dans le moindre temps possible par un corps soumis à l'action de la pesanteur ordinaire.*

Soit la verticale AP l'axe des abscisses, auquel on menera les ordonnées perpendiculaires PM, pm, Qn. Que Mm, mn soient deux éléments consécutifs de la courbe cherchée. La propriété de cette courbe doit être telle que la somme des temps employés à parcourir les éléments Mm, mn, soit un *minimum*; car si cette somme n'étoit pas un *minimum*, et qu'elle fût plus grande que la somme des temps employés à parcourir les petites droites Mr, rn, qui se terminent aux points M et n, la courbe de la plus vîte descente seroit AMrnB, et non pas AMmnB, ce qui est contraire à l'hypothese. De plus, nous pouvons supposer que les points m et r sont placés sur la même droite pm; et il faudra toujours qu'on ait, $T.Mm + T.mn < T.Mr + T.rn$.

Nommons g la gravité; AP, x; Ap, x'; Aq, x''; PM, y; pm, y'; qn, y''. La vîtesse du mobile suivant Mm sera $= \sqrt{2gx}$, et sa vîtesse suivant mn sera $= \sqrt{2gx'}$ (Art. XII).

Donc $T.\,Mm = \frac{Mm}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2]}}{\sqrt{2gx}}$, et $T.\,mn = \frac{\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2]}}{\sqrt{2gx'}}$. Ainsi, en omettant dans les dénominateurs le facteur constant et commun $\sqrt{2g}$, on aura, $\frac{\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2]}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2]}}{\sqrt{x'}}$ $=$ *minimum*.

Cette quantité doit être différenciée, et sa différentielle égalée à zéro, en faisant varier y' seulement, parcequ'en comparant la somme des temps employés à parcourir Mm, mn, avec la somme des temps employés à parcourir mr, rn, on regarde les points M et n comme fixes, et qu'on suppose de plus les points m et r placés sur la droite pm. On aura donc, $\frac{y'-y}{\sqrt{x}.\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2]}} - \frac{y''-y'}{\sqrt{x'}.\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2]}}$ $=$ o, ou bien (en supposant $Mm = ds$, $mn = ds'$, et observant que $y'-y=dy$, $y''-y'=dy'$), $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} - \frac{dy'}{ds'\sqrt{x'}}$ $=$ o, c'est-à-dire $d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\right) =$ o, dont l'intégrale est $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}$ $= \frac{1}{\sqrt{a}}$, a étant une constante; ce qui donne $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, équation différentielle d'une cycloïde. L'intégrale de cette équation contiendra une seconde constante b; et il faudra déterminer les deux constantes a et b par la condition que la cycloïde passe par deux points donnés.

Si on veut avoir l'expression du temps employé à parcourir AM, on observera que $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} \times \frac{dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, et par conséquent, $T.AM = A + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, intégrale qui dépend de la quadrature du cercle.

Je finis par un problème sur le mouvement de corps qui agissent les uns sur les autres.

XIX. PROBLÈME VII. *Soient deux corps* N *et* M (Fig. 197) *attachés aux extrémités d'un fil* NM, *et mobiles dans les*

deux rainures DR, KE, qui se croisent perpendiculairement, et qui sont posées fixement sur un plan horizontal : l'on suppose qu'on donne au corps N une impulsion quelconque, et l'on demande les vitesses des deux corps à chaque instant.

Je suppose qu'en un instant les deux corps N et M eussent parcouru les deux droites infiniment petites NT, MV, mais qu'à cause de l'action et de la réaction qu'ils exercent l'un sur l'autre, le corps N parcourt NH, infiniment peu différente de NT, et le corps M parcourt MP, infiniment peu différente de MV. Il est clair que HT sera la vîtesse perdue par N, et VP la vîtesse gagnée par M. Comme les rainures détruisent une partie du mouvement, celui qui est perdu par N ne se transmet pas tout entier à M. Pour déterminer la quantité infiniment petite de mouvement que ce dernier reçoit, je décompose la vîtesse HT en deux autres HY, HS, dont l'une est dirigée suivant le fil, et l'autre est perpendiculaire à la rainure DR. Cette derniere vîtesse étant détruite, il faut que l'autre seule agisse sur le corps M. Je prends $PZ = HY$, et je construis sur PZ, comme diagonale, un parallélogramme PXZO, dont le côté PX soit perpendiculaire à la rainure KE, et dont le côté PO soit dirigé suivant cette même rainure; alors il est visible que PO est la vîtesse par laquelle le corps N agit sur le corps M, et que par conséquent on a l'équation, $N \times PO = M \times VP$. Mais les triangles semblables POZ, MAN donnent, $AN : AM :: OZ$ ou $HT : PO = \frac{HT \times AM}{AN}$; donc $\frac{AN \times HT \times AM}{AN} = M \times VP$.

Nommons AM, x; AN, y; la verge MN, $a = \sqrt{(xx + yy)}$; l'élément du temps, dt. L'équation précédente se traduira ainsi, $\frac{Nxddy}{y} = Mddx$, ou bien (en mettant pour $\frac{x}{y}$ sa valeur $\frac{-dy}{dx}$), $-Ndyddy = Mdxddx$, ou $Ndyddy + Mdxddx = 0$, dont l'intégrale est $Ndy^2 + Mdx^2 = Adt^2$, équation de la conservation des forces vives. Qu'on mette

dans cette équation pour dx^2 sa valeur $\frac{y^2\,dy^2}{a^2-y^2}$, et pour dy^2 sa valeur $\frac{x^2\,dx^2}{a^2-x^2}$; on trouvera ces deux autres équations,

$$dt\sqrt{A} = \begin{cases} \dfrac{dy\sqrt{[Naa-(N-M)yy]}}{\sqrt{(aa-yy)}}, \\ \dfrac{dx\sqrt{[Maa+(N-M)xx]}}{\sqrt{(aa-xx)}}. \end{cases}$$

Ainsi la relation de t à y et à x sera connue par le moyen des quadratures. Soient V et u les vîtesses des deux corps N et M : on aura, $V = \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{A}.\sqrt{(aa-yy)}}{\sqrt{[Naa-(N-M)yy]}}$, $u = \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{A}.\sqrt{(aa-xx)}}{\sqrt{[Maa+(N-M)xx]}}$.

Supposons qu'au commencement du mouvement le corps N soit placé en A et le corps M en K ; et nommons h la vîtesse initiale et donnée de N. Il est clair qu'on aura, $h = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{N}}$, et par conséquent la constante $A = Nh^2$.

En examinant les expressions des vîtesses des deux mobiles, on verra que ces deux corps parcourront sans fin les diametres DR, EK, abstraction faite de tout frottement.

NOTE V. DYN. LIV. II. CHAP. III. PAGE 298.

Détermination du centre de percussion ou d'oscillation d'une sphere.

I. La formule générale qu'on a donnée (405 et 407) pour trouver le centre d'oscillation ou de percussion d'un système de corps, qui tournent autour d'un point ou axe fixe, s'applique à un corps de grandeur finie, quelle que soit l'espece

d'éléments dont on imagine que ce corps est composé. Dans les corps dont la nature est exprimée par une équation, le choix des éléments doit être fait avec discernement, et de maniere que le calcul nécessaire pour parvenir au résultat indiqué par la formule citée, soit le plus simple qu'il est possible; c'est sur quoi on ne peut pas donner de regles générales. Le théorême de l'article 429 est d'un grand usage pour abréger le calcul. Nos lecteurs pourront s'exercer à trouver le centre d'oscillation ou de percussion d'un triangle, d'un parallélogramme, d'un cercle, d'un cône, etc. Voici la solution du probléme pour la sphere.

II. Soit AMBN (Fig. 198) une sphere homogene attachée fixement par son centre O à une verge CON inflexible et sans pesanteur, qui oscille autour d'un axe horizontal et fixe VCY. Que X soit le centre d'oscillation ou de percussion de cette sphere : on aura (en nommant M la masse de la sphere, Z la somme des produits des molécules de M par les quarrés de leurs distances à l'axe VCY), $CX = \frac{Z}{M \times OC}$. Soit nommée S la somme des produits des molécules de M par les quarrés de leurs distances au diametre AB, qui est parallele à l'axe VCY; on aura (429), $Z = S + M \times (CO)^2$; et par conséquent $CX = \frac{S + M \times (CO)^2}{M \times CO}$. Reste à substituer les valeurs de M et de S.

Coupons la sphere par un plan RQST perpendiculaire au diametre AB, et soit dans ce plan la couronne infiniment étroite *adlfbge*, comprise entre les deux circonférences *adlf*, *bge*, qui ont pour centre commun le point P. Nommons 1 la densité de la sphere; π, le rapport de la circonférence au diametre; a le rayon AO; x, l'abscisse AP; y, l'ordonnée correspondante PR; z, le rayon du cercle *adlf*; b, la droite CO. On aura d'abord, $M = \pi a^2 \times \frac{4}{3} a = \frac{4\pi a^3}{3}$. De plus il est clair que la somme des produits des particules de la couronne *adlfbge*, par les quarrés de leurs distances au

point P, est $2\pi z^3 dz$, dont l'intégrale est $\frac{\pi z^4}{2}$. Faisant $z=y$, on aura, $\frac{\pi y^4}{2}$ pour la somme des produits des particules du cercle RQST, par les quarrés de leurs distances au point P ou au diametre AB. Donc la quantité élémentaire $dS = \frac{\pi y^4 . dx}{2}$; et par conséquent $S = \frac{\pi}{2} \int y^4 dx$, en faisant après l'intégration $x = 2a$. Or, $yy = 2ax - xx$; donc $\int y^4 dx = \int (4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4)\, dx = \frac{4a^2x^3}{3} - ax^4 + \frac{x^5}{5}$; ce qui devient $\frac{16a^5}{15}$, en faisant $x = 2a$. On aura donc $S = \frac{8\pi a^5}{15}$. Substituant pour M, S, CO, leurs valeurs, dans l'équation $CX = \frac{S + M \times (CO)^2}{M \times CO}$, et réduisant, on trouvera, $CX = b + \frac{2a^2}{5b} = CO + \frac{2}{5} \frac{(OM)^2}{CO}$. Ainsi on aura le centre d'oscillation ou de percussion X de la sphere, en prenant sur le prolongement de CO une partie OX, qui soit les deux cinquiemes de la troisieme proportionnelle à la distance CO du centre de la sphere à l'axe de rotation, et au rayon de la sphere.

Fin de la seconde et derniere partie de la mécanique.

RECHERCHES
SUR
L'ÉQUILIBRE DES VOÛTES.

INTRODUCTION.

Tout le monde sait que les pierres ou les *voussoirs*, dont une voûte est composée, forment des especes de pyramides tronquées, qui, en s'appuyant les unes contre les autres par leurs faces latérales et inclinées, se contrebalancent mutuellement, et demeurent suspendues en l'air sans le secours d'aucun soutien inférieur, tout leur effort se dirigeant vers les massifs, ou *pieds droits*, qui portent la voûte, comme si elle n'étoit qu'un seul et même corps continu. Les voussoirs éprouvent l'action de différentes forces, qui proviennent, ou de leurs propres poids, ou de pressions extérieures, ou du frottement, ou de la cohésion des matieres, etc. Toutes ces forces et les résistancees des pieds droits composent un systême qui doit être en équilibre; et de plus cet état d'équilibre doit avoir une consistance ferme et durable.

Les forces particulieres qui agissent de proche en proche sur chaque voussoir peuvent être fort différentes. Par exemple, dans une voûte demi-circulaire, le voussoir du milieu, ou la *clef*, agit comme un coin contre le second voussoir à droite ou à gauche, et tend à le faire remonter; le second voussoir agit de même contre le troisieme; celui-ci contre le quatrieme; ainsi de suite. Or, à mesure qu'on

s'éloigne de la clef, les angles que forment les faces latérales des voussoirs avec l'horizon vont en diminuant ; d'où il résulte que les pressions absolues des voussoirs doivent aller en augmentant, afin que les efforts résultants de ces pressions, perpendiculairement aux faces contiguës des voussoirs, soient égaux de proche en proche, et se fassent mutuellement équilibre.

En général, quelles que puissent être la figure d'une voûte, et la nature des forces qui agissent sur les voussoirs, il doit exister entre toutes ces forces une relation telle que tous les voussoirs, qui forment réellement des corps séparés, soient maintenus en équilibre dans toute l'étendue de la voûte, sans quoi elle se déformeroit et tomberoit par pieces : ensuite, lorsque cet équilibre partiel sera établi, on pourra considérer la voûte comme un corps continu, et il ne s'agira plus que de déterminer les dimensions que les pieds droits doivent avoir pour en soutenir la poussée, ou pour la porter sans s'écraser.

Il ne paroît pas que les anciens architectes fussent conduits par des principes certains et géométriques dans la recherche des moyens qu'ils employoient pour assurer la solidité de leurs édifices. L'expérience, l'imitation, et une mécanique naturelle, leur servoient de guides. Vitruve, qui florissoit sous Auguste, et qui a rassemblé dans son *architecture* toutes les connoissances qu'il regarde comme nécessaires à ceux qui exercent cet art, ne parle aucunement des secours qu'ils doivent emprunter de la mécanique pour connoître et décomposer les forces, et pour renvoyer leurs efforts vers des appuis capables de les soutenir. Il ne dit rien non plus de l'*art du trait*, ou de la coupe des pierres et des bois. Vraisemblablement les anciens architectes, occupés d'une maniere exclusive de tout ce qui regardoit la décoration externe et la distribution interne de leurs édifices, abandonnoient entièrement aux appareilleurs la partie de l'art, qui a pour objet la solidité et le détail des moyens de

construction : en quoi ils ont eu malheureusement trop d'imitateurs parmi les modernes.

On n'a commencé que très tard à sentir la nécessité de soumettre le problême de l'équilibre des voûtes aux lois de la mécanique. En 1695, la Hire, dans son *traité de Mécanique*, établit par la théorie du coin la proportion suivant laquelle on doit faire augmenter les poids absolus des voussoirs, depuis la clef jusqu'aux *impostes*, dans une voûte demi-circulaire. L'historien de l'académie des sciences rapporte, sous l'année 1704, que Parent détermina, suivant les mêmes principes, mais seulement par points, la figure que doit avoir l'extrados d'une voûte dont l'intrados est un demi-cercle, et qu'il donna de plus la mesure de la poussée d'une telle voûte contre les pieds droits. J'ignore si cette solution a été imprimée.

Les deux illustres freres, Jacques Bernoulli et Jean Bernoulli, Hnguens et Léibnitz, ayant résolu, en 1691, le problême de *la chaînette*, les géometres ne tarderent pas à s'appercevoir que la figure de cette courbe, retournée de bas en haut, est celle qu'on doit donner à une voûte composée de voussoirs infiniment petits et également pesants, pour que toutes ses parties soient en équilibre. David Gregori fit remarquer le premier cette identité dans les *Transactions philosophiques* pour l'année 1707; mais son raisonnement, quoiqu'exact, n'avoit pas toute la clarté qu'on pouvoit desirer.

On trouve dans l'un des mémoires posthumes de Jacques Bernoulli deux solutions directes du problême, fondées sur deux différentes manieres d'envisager l'action des voussoirs. La premiere est claire, simple, exacte, et conduit facilement à la véritable équation de la courbe, qui est la chaînette retournée; la seconde a besoin d'une petite correction, que l'auteur auroit sans doute faite lui-même, s'il eût pu revoir son mémoire, et que Cramer, éditeur de ses œuvres, a indiquée : au moyen de cette correction, on retrouve également l'équation de la chaînette.

Dans les mémoires de l'académie des sciences pour l'année 1712, la Hire, considérant le problême de la poussée des voûtes, sous un point de vue indiqué par quelques expériences, en donna une solution, qui, par la simplicité du calcul et des résultats, fut saisie et adoptée avidement par la plupart des praticiens, sans s'embarrasser si elle étoit applicable à tous les cas qui peuvent arriver. Il suppose que les voûtes dont les pieds droits n'ont pas une épaisseur suffisante pour en soutenir la poussée, se fendent vers les reins à la hauteur d'environ 45 degrés au-dessus des impostes: en conséquence il regarde la partie supérieure de la voûte comme un coin qui tend à écarter ou à renverser les pieds droits, et il détermine, par la théorie du coin et du levier, les dimensions qu'ils doivent avoir pour résister à un seul effort. On s'en est tenu pendant long-temps uniquement à cette méthode, pour les voûtes en berceau; on l'a même appliquée aux voûtes en dôme, quoique les deux cas ne se ressemblent point, et qu'ils conduisent à des équations de degrés différents, comme on le verra dans la suite.

Couplet a donné en deux parties un mémoire sur la poussée des voûtes en berceau. La premiere, imprimée dans le volume de l'académie pour l'année 1729, traite de la poussée des voûtes et de l'épaisseur de leurs pieds droits, en considérant les voussoirs comme infiniment polis, ou comme pouvant glisser les uns sur les autres, sans éprouver aucune résistance de la part du frottement. Mais comme cette hypothese n'est pas exactement conforme à l'expérience, la seconde partie du mémoire, imprimée dans le volume de l'académie pour l'année 1730, a pour objet les mêmes questions, en supposant que les voussoirs n'ont pas la faculté de glisser, mais qu'ils peuvent se soulever et s'écarter les uns des autres par de petits mouvements de rotation. Toute cette théorie est appliquée principalement aux voûtes circulaires. Couplet détermine la proportion des poids des voussoirs, et la figure qu'il faut donner à l'extrados, relativement à l'intrados; il n'a d'ailleurs ajouté que très peu de chose aux

théories de la Hire et de Parent; et aucun d'eux n'a traité le sujet avec la généralité et la précision nécessaires, soit dans la théorie, soit dans la pratique.

Le volume de l'académie pour l'année 1734 contient un mémoire de Bouguer *sur les lignes courbes propres à former les voûtes en dôme.* L'auteur fait voir qu'on peut employer pour cela une infinité de lignes courbes, et en même temps il indique la maniere de choisir les plus avantageuses. Il suppose toujours que les voussoirs ont leurs surfaces infiniment polies; il établit, d'après cette hypothese, les conditions de l'équilibre dans chaque assise horizontale d'une voûte en dôme. On voit que ce probléme a de l'analogie avec celui de la chaînette retournée pour les voûtes en berceau. Bouguer n'a d'ailleurs donné aucune méthode pour déterminer la poussée des voûtes en dôme; il n'a point examiné la loi des forces qui doivent agir sur les voussoirs, lorsque la courbe génératrice est assujettie à des conditions données; matiere féconde en problêmes curieux et utiles.

Tels étoient les ouvrages, au moins ceux qui m'étoient connus, sur l'équilibre des voûtes, lorsqu'en 1770, comme les dates en font foi, je traitai la question dans toute sa généralité, tant pour les voûtes en berceau que pour les voûtes en dôme. J'examinai tout ce qui regarde la figure et la poussée de ces deux especes de voûtes, dans deux mémoires imprimés parmi ceux de l'académie des sciences de Paris, pour les années 1774 et 1776. Ce travail fut entrepris à l'occasion du dôme de l'église de Sainte-Genevieve (aujourd'hui *le Panthéon français*), commencée par le célebre architecte Soufflot, et achevée sur ses dessins. Les piliers et les colonnes qui portent ce dôme ayant été regardés par quelques critiques, peu versés dans la mécanique, comme insuffisants pour en soutenir la poussée, je fus engagé à chercher la vraie formule générale, alors inconnue, pour déterminer la poussée des voûtes en dôme, comme la Hire a déterminé celle des voûtes en berceau: l'application que je fis de ma formule au sujet en question prouve que les piliers

avoient une épaisseur suffisante pour résister au renversement; aussi l'édifice n'a-t-il éprouvé à cet égard aucun mouvement. Mais, par l'usage vicieux où l'on étoit alors de creuser le lit des pierres vers l'intérieur, il est arrivé que le tassement, occasionné par la charge supérieure du dôme, a fait éclater les pierres vers les parements, et que presque toutes les colones ont éprouvé les funestes effets de ce tassement. Souflot lui-même, qui en eut une crainte anticipée, entreprit de faire des expériences pour déterminer la résistance dont les pierres sont capables sans s'écraser, sous des pressions données. Il mourut en 1780, avec la malheureuse certitude oculaire que les piliers de son dôme commençoient à se briser vers les bords. Sa machine à écraser les pierres a été dans la suite fort perfectionnée par le cit. Rondelet, qui a fait un grand nombre d'expériences sur la résistance des pierres de différentes especes et de différentes dimensions: il a déja publié une partie de ce travail dans son *Mémoire historique sur le Panthéon français* (1797); il le continue avec succès, et on en doit attendre les plus grands avantages pour la connoissance de cette branche importante de l'architecture. J'ajouterai ici qu'on a pris en dernier lieu des précautions efficaces contre les progrès de l'affaissement du dôme du Panthéon français.

Le tome VII des ouvrages présentés à l'académie des sciences contient, sous la date de l'année 1773, un beau mémoire du cit. Coulomb, aujourd'hui membre de l'institut national, sur quelques problêmes relatifs à l'architecture. Parmi ces problêmes se trouve celui de l'équilibre des voûtes en berceau, que l'auteur a traité par une méthode dirigée vers l'utilité pratique.

En 1785, le cit. Mascheroni fit imprimer à Bergame un ouvrage intitulé: *Nuove Ricerche sull' equilibrio delle volte*, dans lequel il y a des propositions curieuses sur l'équilibre des voûtes, principalement sur l'équilibre des voûtes en dôme, à bases circulaires, elliptiques et polygonales. L'au-

teur reconnoît lui-même que mes deux mémoires ne lui ont pas été inutiles.

Un grand nombre de nouvelles réflexions théoriques et expérimentales que j'ai faites, depuis mes premiers essais, sur toute cette matiere, m'ont déterminé à la reprendre et à la traiter avec toute l'étendue nécessaire pour rendre mes recherches utiles aux mécaniciens géometres. J'ai d'ailleurs toujours suivi mes anciens principes : j'aurois donc pu donner mes additions en forme de supplément à mes deux mémoires ; mais cela auroit demandé une foule de citations et de renvois incompatibles avec la méthode et la clarté, qui ne peuvent avoir lieu, lorsque chaque chose n'est pas à sa véritable place. J'ai préféré de refondre entièrement mes deux mémoires, et d'y incorporer les additions, de telle maniere que le tout forme maintenant un ouvrage comme nouveau.

Je considérerai séparément l'équilibre des voûtes en berceau, et celui des voûtes en dôme.

SECTION PREMIERE.

De l'équilibre des voûtes en berceau.

CHAPITRE PREMIER.

Détermination de l'épaisseur des pieds droits, lorsque la voûte tend à se rompre vers des points donnés des reins.

---

1. Le problême dont il s'agit ici est celui de la Hire, de 1712. Quoiqu'il n'ait aucune difficulté, je crois devoir en donner ici une solution fort simple, pour épargner à quelques lecteurs la peine de recourir aux mémoires de l'académie, ou à d'autres ouvrages où il se trouve également.

PROBLÊME.

2. La *partie supérieure* cXZCZ'X' (Fig. 1) *d'une voûte en berceau, dont les deux impostes sont à même hauteur, étant considérée comme un coin qui tend à renverser les deux pieds sur les points de rotation fixes* F *et* F' *: on demande les épaisseurs* DF, D'F', *qu'il faut donner aux pieds droits, pour qu'il y ait équilibre.*

Je suppose que la voûte est divisée en deux parties égales et semblables par l'axe verticale OCQ : que les joints XZ, X'Z', sont perpendiculaires à la courbe d'intrados ACA'; que les parties AZX*a*, A'Z'X'*a'* de la voûte, sont fortement adhérentes aux pieds droits AF, A'F, et ne forment qu'un même corps avec chacun d'eux; et enfin que toute la voûte est composée d'une même matiere homogene, ou réduite à

l'homogénéité, afin de n'avoir à faire entrer que des volumes dans le calcul.

Le centre de gravité de la partie supérieure cXZCZ'X' de la voûte étant placé sur la verticale OCQ, il est clair qu'en considérant les plans inclinés XZ, X'Z', comme immobiles, il y aura équilibre, lorsqu'il se trouvera sur OQ un point duquel on puisse mener deux perpendiculaires aux deux plans inclinés. Supposons que le point Q satisfasse à cette condition, et que QG, QG', soient les deux perpendiculaires dont je viens de parler.

Ayant pris QN pour représenter l'aire ou le poids cXZCZ'X', soit décomposée cette force en deux autres QI, QS, dirigées suivant QG, QG'. Imaginons que la force QI (on doit entendre les mêmes choses pour l'autre partie de la voûte) soit appliquée au point G de sa direction, et représentée par Gh=QI; décomposons la force Gh en deux autres Gq, Gf, l'une horizontale, l'autre verticale (1). La force horizontale Gq tend à renverser le massif XZADFY autour du point fixe F, tandis qu'au contraire ce massif est retenu sur sa base par son propre poids et par la force verticale Gf. Du point H, centre de gravité de l'aire AZXa, et du point R, centre de gravité du rectangle ADFY, soient abaissées les verticales HK, RL; enfin abaissons la verticale GT, et prolongeons les droites Gq, FY, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en M.

---

(1) Frisi, géometre italien, attaqua toute cette maniere de décomposer les forces, et y en substitua une autre dans le tome II de ses *œuvres*, imprimées à Milan en 1783. Étant mort quelque temps après, on lui fit à Milan un éloge funebre, dans lequel on eut grand soin de vanter sa critique et sa méthode; mais le célebre M. Trembley, membre de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, ayant pris la peine d'examiner cette prétendue méthode (Journal de Physique, sept. 1788), fit voir qu'elle n'est qu'un tissu de paralogismes et d'absurdités. Avis au panégyriste.

Soient
- le sinus total . . . . $= 1$,
- l'angle NQI ou fGh . . . . $= m$,
- l'angle IQS . . . . $= p$,
- GT . . . . $= c$,
- AD . . . . $= h$,
- DT . . . . $= i$,
- DK . . . . $= k$,
- DF . . . . $= z$,
- l'aire cXZCZ'X' . . . . $= a^2$,
- l'aire AZXa . . . . $= b^2$.

Toutes ces quantités sont données par la figure de la voûte, à l'exception de z, qui est l'inconnue.

La force Gh ayant évidemment pour expression $\frac{a^2 \times \sin. m}{\sin. p}$, l'expression de la force Gq sera $\frac{a^2 \times (\sin. m)^2}{\sin. p}$, et celle de la force G$f$ sera, $\frac{a^2 \sin. m \cos. m}{\sin. p}$. Nous ferons, pour abréger, $\frac{a^2 (\sin. m)^2}{\sin. p} = A$, et $\frac{a^2 \sin. m \cos. m}{\sin. p} = B$.

On voit que les quantités A et B sont de deux dimensions; on fait abstraction de l'épaisseur horizontale de la voûte, qui est par-tout la même dans les voûtes en berceau.

Les conditions de l'équilibre demandant que le moment de la force A, par rapport au point F, soit égal à la somme des moments des trois forces B, b^2, hz, par rapport au même point, on aura l'équation du second degré,

$$Ac = B(z + i) + b^2(z - k) + hz \times \frac{z}{2}:$$

de laquelle on tire,

$$z = -\left(\frac{B + b^2}{h}\right) + \sqrt{\left[\frac{2Ac - 2Bi + 2b^2k}{h} + \left(\frac{B + b^2}{h}\right)^2\right]}.$$

J'emploie simplement le signe + du radical, sans quoi la valeur de z seroit négative, ce qui ne peut pas être.

Les applications de cette formule à des exemples particuliers sont trop faciles pour que je m'y arrête. La position des joints XZ, X'Z', doit être donnée par l'expérience. Ordinairement on suppose que ces joints forment des angles de 45 degrés avec l'horizon.

CHAPITRE II.

Relations qui doivent avoir lieu entre les forces qui agissent sur les voussoirs, et la figure de la voûte, pour que le systême des voussoirs soit en équilibre : détermination subséquente de l'épaisseur des pieds droits.

---

3. On voit assez que le problême précédent ne contient qu'une détermination hypothétique et vague de l'équilibre des voûtes, et que si cette détermination est suffisante dans les applications pratiques, qui ne demandent pas une grande précision, elle ne peut pas contenter les mécaniciens géometres. Il s'agit donc ici de considérer la voûte dans sa contexture intime, et de commencer par établir l'équilibre entre tous les voussoirs, avant de s'occuper des dimensions des pieds droits, lesquelles doivent être subordonnées à cet équilibre. Or, lorsqu'une voûte vient d'être achevée, et qu'elle est encore posée sur son ceintre, les voussoirs n'ayant pas eu le temps de prendre corps ensemble, doivent être regardés comme indépendans les uns des autres, et comme soumis séparément à l'action de leur propre pesanteur et à celle des fardeaux qu'ils supportent. Ainsi il faut qu'ils se contrebalancent mutuellement dans cet état, puisque le ceintre de charpente n'est qu'un simple moyen auxiliaire pour poser successivement les voussoirs à leurs places, et qu'il est d'ailleurs absolument étranger à la voûte. Mais cet équilibre étant une fois établi, il subsistera et s'affermira nécessairement dans la suite par les liaisons du mortier et par la résistance du frottement : alors la poussée de la voûte contre les pieds droits s'exercera comme si la voûte n'étoit composée que d'une seule piece.

PROBLÊME I.

4. DÉTERMINER *les conditions de l'équilibre entre tous les voussoirs d'une voûte quelconque en berceau.*

I.

SOIENT (Fig. 2) ACA' l'intrados d'une voûte en berceau, aca' l'extrados. Supposons qu'à chacun des voussoirs soient appliquées des forces absolues quelconques V, F, F', etc., f, f', etc. Soient X, X' deux voussoirs consécutifs, soumis respectivement à l'action des deux forces F, F'. Les joints mM, nN, pP, etc., doivent être perpendiculaires à l'intrados ACA', tant pour la grace de la voûte que pour la solidité de la construction; ainsi je les supposerai tels en effet.

II.

AYANT pris sur la direction de la force F la partie XE pour la représenter, je la décompose en deux autres forces Xu, Xt, perpendiculaires aux deux joints mM, nN du voussoir X. Soit X' le point où la direction de la force Xt rencontre celle $F'X'$ de la force F'. Je prends sur $F'X'$ la partie $X'E'$ pour représenter la force F', et je la décompose en deux autres forces $X'q$, $X'l$, perpendiculaires aux deux points nN, pP du voussoir X'. Alors les deux voussoirs X, X' se feront équilibre, si les deux forces Xt, $X'q$, directement opposées, par lesquelles ils agissent l'un contre l'autre, sont de plus égales. Il ne s'agit donc que de former l'équation, *Force* $Xt =$ *Force* $X'q$, et de substituer pour ces forces leurs valeurs.

III.

LE parallélogramme $XtEu$ donne, *Force* $Xt =$ *Force* $XE \times \frac{\sin.\ XEt}{\sin.\ XtE} = F \times \frac{\sin.\ XEt}{\sin.\ XtE}$; et le parallélogramme $X'qE'l$

donne de même, *Force* $X'q = F' \times \frac{\sin. X'E'q}{\sin. X'qE'}$. Ainsi on aura,

$$F \times \frac{\sin. XEt}{\sin. XtE} = F' \times \frac{\sin. X'E'q}{\sin. X'qE'}, \text{ ou :}$$

$$(A) \quad \frac{F}{F'} = \frac{\sin. XtE \times \sin. X'E'q}{\sin. XEt \times \sin. X'qE'}.$$

IV.

Soient I le point de concours des joints *m*M, *n*N, prolongés; T, celui de concours des joints *n*N, *p*P, aussi prolongés; H et L les points de concours des joints extrêmes *m*M, *p*P, avec l'axe vertical CO; Z et G, les points de concours des forces F, F', avec le même axe. Il est clair que l'angle X*t*E est égal à l'angle NIM, puisque les côtés de l'un sont perpendiculaires à ceux de l'autre. Par la même raison, l'angle X'*q*E' est égal à l'angle PTN. De plus, en menant par le point *z*, où la droite X*u* rencontre le joint *m*M, la droite *zz'* parallele à la direction de la force F, on verra que l'angle XE*t*, ou l'angle *u*XE, ou l'angle $uzz' =$ *Ang.* uzK — *Ang.* $Kzz' = 90^{\circ}$ — *Ang.* $Kzz' = 90^{\circ}$ —(*Ang.* CZF — *Ang.* CHM) : par des considérations semblables, l'angle $X'E'q = 90^{\circ}$ — (*Ang.* CLP — *Ang.* CGF'). Donc, en prenant toujours le sinus total pour l'unité, on aura, par la trigonométrie, sin. XE*t* = cos. CZF × cos. CHM + sin. CZF × sin. CHM; et sin. X'E'*q* = cos. CGF' × cos. CLP + sin. CGF' × sin. CLP. Ainsi l'équation (A) se changera en celle-ci :

$$(B) \quad \frac{F}{F'} = \frac{\sin. NIM. (\cos. CGF'. \cos. CLP + \sin. CGF' \sin. CLP.)}{\sin. PTN. (\cos. CZF. \cos. CHM + \sin. CZF. \sin. CHM.)}.$$

On voit par cette équation que, connoissant la figure de l'intrados, les arcs MN, NP, etc., auxquels répondent les voussoirs, et les directions des forces F, F', etc., on connoîtra les rapports des mêmes forces et la figure de l'extrados. Par exemple, si l'intrados ACA' (Fig. 3) est un demi-cercle, que chaque voussoir soit simplement soumis à l'action de sa propre pesanteur, et que les arcs d'extrados

mn, $n'p'$, etc., soient concentriques et semblables à ceux d'extrados, on pourra déterminer, par la simple géométrie élémentaire, les points m', n', p', etc.; ce qui est le problême particulier de Parent. Je reviens au problême général.

V.

Supposons que le nombre des voussoirs soit infini, ou que l'intrados forme une courbe continue. Alors (Fig. 4) les arcs MN, NP, etc., sont infiniment petits; et les angles NIM, PTN, etc., sont ceux que forment entre eux, de proche en proche, les rayons osculateurs. Soient MN, NP, PQ, trois éléments consécutifs de la courbe, que je suppose égaux entre eux : menons à l'axe vertical CO les ordonnées MR, NR', PR'', QR'''; et des points M, P, abaissons les perpendiculaires Mr, Ph, sur NR', QR''', respectivement.

Soient :

CR	$=x$,
CR'	$=x'$,
CR''	$=x''$,
MR	$=y$,
NR'	$=y'$,
PR''	$=y''$,
chacun des trois éléments égaux MN, NP, PQ	$=ds$,
le rayon osculateur MI	$=R$,
le rayon osculateur NI	$=R'$,
l'angle CZF de la force F avec l'axe .	$=u$,
l'angle CGF' de la force F' avec l'axe .	$=u'$.

En comparant la *Figure* 4 avec la *Figure* 2, on verra que sin. NIM $=\frac{ds}{R}$; sin. PTN $=\frac{ds}{R'}$. De plus, l'angle CHM étant égal à l'angle MNr, on a, cos. CHM $=\frac{rN}{MN}=\frac{dy}{ds}$;

sin. CHM $= \frac{Mr}{MN} = \frac{dx}{ds}$: semblablement, cos. CLP $= \frac{dy''}{ds}$; sin. CLP $= \frac{dx''}{ds}$. Par conséquent l'équation générale (B) deviendra :

$$\frac{F}{F'} = \frac{R'}{R} \times \frac{dy'' \cos. u' + dx'' \sin. u'}{dy \cos. u + dx \sin. u}.$$

Or $F' = F + dF$; et F étant la force absolue qui agit sur l'élément MN, ou la résultante de toutes les forces qui agissent sur chacun des points de cet élément, et que l'on peut regarder comme égales et paralleles : si l'on nomme ϕ l'une quelconque de ces diverses forces, on aura, $F = \phi ds$, et $dF = d\phi\, ds$, ds étant constant. D'un autre côté, on a, $R' = R + dR$; $y'' = y' + dy' = y + 2dy + d^2y$; $dy'' = dy + 2d^2y + d^3y$; $dx'' = dx + 2d^2x + d^3x$; cos. $u' =$ cos. $u + d$ (cos. u); sin. $u' =$ sin. $u + d$ (sin. u). Substituant toutes ces valeurs dans l'équation précédente; réduisant, et négligeant les infiniment petits du troisieme ordre, on trouvera :

$$o = \begin{cases} 2R\phi \cos. u d^2y + R\phi dy.\, d(\cos. u) + 2R\phi \sin. u.\, d^2x \\ + R\phi dx.\, d(\sin. u) + \phi \cos. u.\, dRdy + \phi \sin. u.\, dRdx \\ + R \cos. u.\, d\phi dy + R \sin. u.\, d\phi dx, \end{cases}$$

équation que j'écris sous cette autre forme plus commode :

$$\text{(C)}\quad o = \begin{cases} \phi \cos. u (2Rd^2y + dRdy) + \phi \sin. u.(2Rd^2x + dRdx) \\ + Rdy.\, d(\phi \cos. u) + Rdx.\, d(\phi \sin. u). \end{cases}$$

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

6. CETTE équation générale fournit la solution des deux questions suivantes, dont l'une est l'inverse de l'autre.

1°. *Connoissant la loi des forces qui pressent les voussoirs, trouver la figure de la voûte.*

2°. *Connoissant la figure de la voûte, trouver la loi des forces qui pressent les voussoirs.*

Je vais résoudre plusieurs cas de ces deux questions, en

me bornant à des hypotheses qui peuvent avoir réellement lieu dans la nature.

EXEMPLES DE LA PREMIERE QUESTION.

Exemple I.

7. Chaque *point de la courbe* ACA' *est pressé verticalement avec une force par-tout constante.*

Dans cette hypothese, on a, $\varphi =$ *constante*, et $d\varphi = 0$; sin. $u = 0$; cos. $u = 1$. Par conséquent l'équation générale (C) descendra ici simplement :

$$2R\,d^2y + dR\,dy = 0.$$

Multipliant tout par dy, et intégrant, on trouvera, $R\,dy^2 = A\,ds^2$, A étant une constante qu'on déterminera ci dessous. Mettons pour R sa valeur $-\frac{ds\,dx}{d^2y}$ dans l'hypothese de ds constant, qui est celle du problême : nous aurons, $-\frac{dx\,dy^2}{d^2y} = A\,ds$, ou $dx = -A\,ds.\frac{d^2y}{dy^2}$, dont l'intégrale est, $x + C = \frac{A\,ds}{dy}$, ou $x + C = \frac{A\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$; ce qui donne $dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{[(x+C)^2 - A^2]}}$, équation de la chaînette ordinaire. Nous déterminerons bientôt la seconde constante C.

Corollaire.

8. L'axe vertical CO étant supposé mené par le point le plus haut de la courbe, la partage en deux parties égales et semblables; et cela, quand même les impostes ne seroient pas à même hauteur, pourvu que dans ce dernier cas on prolongeât les branches de la courbe par la pensée. On doit donc avoir, $\frac{dx}{dy} = 0$, lorsque $x = 0$. Ainsi $C^2 - A^2 = 0$, ou

$C = A$; et l'équation de la courbe devient $dy = \frac{A dx}{\sqrt{(2Ax + xx)}}$, d'où l'on tire, en intégrant de maniere que $x = o$ donne $y = o$, $y = A. L. \left(\frac{A + x + \sqrt{(2Ax + xx)}}{A}\right)$.

Maintenant, si l'on suppose qu'à l'abscisse $CO = a$ réponde l'ordonnée $OA = b$, on aura l'équation .... $b = A. L. \left(\frac{A + a + \sqrt{(2Aa + aa)}}{A}\right)$, entre les trois quantités constantes A, a, b; d'où l'on voit que, connoissant ou prenant à volonté deux d'entre elles, on connoîtra la troisieme.

REMARQUE.

9. PLUSIEURS praticiens, séduits par la propriété que la chaînette a d'être en équilibre dans toute son étendue, lorsque tous les voussoirs sont égaux et également pesants, emploient souvent cette courbe, sans faire attention que cet équilibre se rompt, lorsque la voûte vient à être chargée de poids étrangers et inégaux; ce qui arrive souvent, et ce qui l'expose à tomber. D'ailleurs ces sortes de voûtes ont une poussée considérable, à moins qu'elles ne soient extrêmement surhaussées.

EXEMPLE II.

10. TOUTES *les forces* φ *sont supposées verticales, mais variables en quantités, et proportionnelles, en chaque point de la courbe, à une fonction donnée de l'abscisse correspondante.*

Ce cas a lieu, par exemple, dans les arches de pont, lorsqu'elles sont chargées de terre ou de maçonnerie, à des hauteurs inégales au-dessus des différents voussoirs. Alors les pressions φ sur les points de l'intrados ACA' varient d'un point à l'autre, suivant une certaine loi, que je suppose telle

que chaque force φ dépende de l'abscisse correspondante x, et de quantités constantes données.

Dans cette hypothese, on a, sin. $u = 0$, cos. $u = 1$; et l'équation (C) devient :

$$2R\varphi d^2y + \varphi dy dR + R dy d\varphi = 0;$$

ou (en multipliant tout par dy),

$$2R\varphi dy d^2y + \varphi dy^2 dR + R dy^2 d\varphi = 0,$$

dont l'intégrale est $R\varphi dy^2 = A^2 ds^2$; ou (en mettant pour R sa valeur $\frac{-ds dx}{d^2y}$),

$\varphi dx = -A^2 ds. \frac{d^2y}{dy^2}$, dont l'intégrale est $\int \varphi dx + C^2 = \frac{A^2 ds}{dy}$. Éliminant ds, et séparant les indéterminées, on trouve, pour l'équation de la courbe :

$$dy = \frac{A^2 dx}{\sqrt{[(\int \varphi dx + C^2)^2 - A^4]}}.$$

L'intégration $\int \varphi dx$ s'effectuera exactement, ou par approximation, en mettant pour φ sa valeur donnée en x et constantes; et les constantes introduites par les intégrations se détermineront par les conditions que la courbe passe par les trois données A, C, A'.

Exemple III.

11. Les *forces φ sont supposées perpendiculaires à l'intrados* ACA', *et proportionnelles à une fonction de l'abscisse* x *et de constantes.*

Cela arrive lorsque la voûte est destinée à porter de l'eau ou des terres liquides jusqu'à un certain point : alors chaque point de la courbe ACA' est poussé perpendiculairement par une force qui dépend de la profondeur du point pressé.

Dans cette hypothese, on a, sin. $u = \frac{dx}{ds}$, cos. $u = \frac{dy}{ds}$; et par conséquent l'équation générale (C) devient :

$$0 = 3R\varphi(dy d^2y + dx d^2x) + (dx^2 + dy^2)(\varphi dR + R d\varphi);$$

ou bien (à cause de ds constant, qui donne, $dxd^2x + dyd^2y = 0$).

$$\varphi dR + R d\varphi = 0,$$

dont l'intégrale est, $\varphi R = A^2$. Ainsi $\varphi dx = \frac{A^2 dx}{R} = -\frac{A^2 d^2 y}{ds}$, en mettant pour R sa valeur $-\frac{ds\,dx}{d^2y}$. Donc $\int \varphi\, dx = B^2 - \frac{A^2 dy}{ds}$; d'où l'on tire (en mettant pour ds sa valeur, et séparant les indéterminées),

$$dy = \frac{(B^2 - \int \varphi\, dx)\, dx}{\sqrt{[A^4 - (B^2 - \int \varphi\, dx)^2]}};$$

équation différentielle de la courbe.

Si la voûte ACA' (Fig. 5) porte un vrai fluide représenté par ACA'HZKE, et que Vc soit la hauteur connue de ce fluide au-dessus de la clef : alors la pression perpendiculaire φ sur chaque point de la courbe $= c + x$, en faisant $Vc = c$; et $\int \varphi dx = \frac{x^2}{2} + cx$. Par conséquent l'équation de la courbe sera, $dy = \frac{(2B^2 - x^2 - 2cx)\, dx}{\sqrt{[4A^4 - (2B^2 - x^2 - 2cx)^2]}}$.

Le second membre peut s'intégrer par la rectification des *sections coniques*.

EXEMPLE IV.

12. CHAQUE *point de la courbe* ACA' (Fig. 6) *est supposé pressé par deux forces, l'une verticale, l'autre perpendiculaire à la courbe; et ces forces sont des fonctions quelconques de l'abscisse* x.

Les forces de la première espece peuvent être censées provenir du poids même des voussoirs ou des terres, et celles de la seconde des pressions d'un fluide qui couvriroit au moins en partie la voûte.

Soient, pour le point M, Ml la force verticale, Mh la force perpendiculaire à la courbe; et soit achevé le parallélogramme Mlgh. La diagonale Mg exprimera la force que

nous avons appelée φ, et l'angle gMl sera celui que nous avons appelé u. Menons gf perpendiculaire à Ml prolongée ; et représentons la force verticale Ml par p, la force perpendiculaire à la courbe par q, (p et q étant des fonctions quelconques de x). On aura $gf = lg \times \sin. glf = Mh \times \sin. MNr = \frac{qdx}{ds}$; $lf = Mh \times \cos. MNr = \frac{qdy}{ds}$; $Mf = p + \frac{qdy}{ds}$. D'un autre côté, $gf = Mg \times \sin. gMf = \varphi \sin. u$, $Mf = Mg \times \cos. gMf = \varphi \cos. u$. Ainsi, $\varphi \sin. u = \frac{qdx}{ds}$; $\varphi \cos. u = p + \frac{qdy}{ds}$; $d(\varphi \sin. u) = \frac{qd^2x}{ds} + \frac{dqdx}{ds}$; $d(\varphi \cos. u) = dp + \frac{qd^2y}{ds} + \frac{dqdy}{ds}$.

Substituons ces valeurs de $\varphi \sin. u$, $\varphi \cos. u$, $d(\varphi \sin. u)$, $d(\varphi \cos. u)$, dans l'équation générale (C) ; et nous trouverons :

$$o = \begin{cases} 2Rpd^2y + pdRdy + Rdydp + \\ \frac{3Rq}{ds}(dyd^2y + dxd^2x) + \left(\frac{qdR + Rdq}{ds}\right)(dx^2 + dy^2) ; \end{cases}$$

ou (à cause de $dxd^2x + dyd^2y = o$, que donne la supposition de ds constante, et de $ds^2 = dy^2 + dx^2$),

$$o = 2Rpd^2y + pdRdy + Rdydp + qdRds + Rdqds.$$

Le terme $2Rpd^2y$ est la même chose que $Rpd^2y + Rpd^2y$, ou que $-pdsdx + Rpd^2y$, en mettant dans la premiere partie pour R sa valeur $-\frac{dsdx}{d^2y}$. Ainsi notre équation deviendra :

$$o = \begin{cases} -pdsdx + Rpd^2y + pdRdy + Rdydp + \\ qdRds + Rdqds, \end{cases}$$

dont l'intégrale est $A^2ds = -ds\int pdx + pRdy + Rqds$; ou (en mettant pour R sa valeur $-\frac{dsdx}{d^2y}$),

$$A^2 = -\int pdx - \frac{pdxdy}{d^2y} - \frac{qdxds}{d^2y} ; \text{ ou}$$

$$-A^2d^2y = d^2y\int pdx + pdxdy + qdxds,$$

dont l'intégrale est, $B^2ds - A^2dy = dy\int pdx + ds\int qdx$;

ce qui donne (en éliminant ds, et séparant les indéterminées),

$$dy = \frac{(B^2 - \int q dx)\,dx}{\sqrt{[(\int p dx + A^2)^2 - (B^2 - \int q dx)^2]}}.$$

Si la force verticale p est constante, et que la force perpendiculaire $q = x + c$, on aura,

$$dy = \frac{(2B^2 - x^2 - 2cx)\,dx}{\sqrt{[4(px + A^2)^2 - (2B^2 - x^2 - 2cx)^2]}}.$$

EXEMPLES DE LA SECONDE QUESTION DE L'ARTICLE 6.

Exemple I.

13. Les *directions de toutes les forces* φ (Fig. 4) *étant supposées verticales; on demande l'expression générale de* φ, *quelle que soit la courbe* ACA′, *dont la nature est maintenant donnée.*

D'abord l'équation générale (C) de l'article 5 devient ici (à cause de sin. $u = 0$, et de cos. $u = 1$),

$$\varphi\,(2Rd^2y + dRdy) + Rdyd\varphi = 0,$$

ou (en multipliant tout par dy),

$$2\varphi Rdyd^2y + \varphi\, dRdy^2 + Rd\varphi dy^2 = 0,$$

dont l'intégrale est, $\varphi Rdy^2 = A^2ds^2$. Donc $\varphi = \frac{A^2ds^2}{Rdy^2}$; formule qui, dans chaque cas particulier, donnera la valeur de φ en quantités finies, en mettant pour R, ds, dy, leurs valeurs données par la nature de la courbe.

Corollaire.

14. Supposons, par exemple, que l'intrados ACA′ soit une demi-ellipse, surbaissée ou surmontée, dont le demi-axe CO $= a$, le demi-axe OA $= b$: on trouvera, $\frac{ds^2}{Rdy^2} = \frac{ab_{,}}{(b^2 - y^2)\sqrt{(b^4 - b^2y^2 + a^2y^2)}}$. Ainsi

$$\varphi = \frac{A^2\,ab^2}{(b^2 - y^2).\sqrt{(b^4 - b^2y^2 + a^2y^2)}}.$$

Pour déterminer la constante A, supposons qu'au sommet C, où $y = 0$, la force φ soit représentée par mg, g étant la gravité ordinaire, m une ligne constante donnée : on aura, $mg = \frac{A^2 a}{b^2}$, et par conséquent $A^2 = \frac{mb^2 g}{a}$; de sorte que $\varphi = \frac{m b^4 g}{(b^2 - y^2)\sqrt{(b^4 - b^2 y^2 + a^2 y^2)}}$.

On voit par cette expression que les forces φ augmentent depuis le sommet C jusqu'aux naissances A, A', où ces forces deviennent infinies. Ainsi les voûtes elliptiques, surtout les voûtes surbaissées, doivent être fort chargées vers les naissances et vers les reins, pour être solides.

Si on veut connoître le rapport des forces φ au sommet C de l'ellipse, et au point M, en supposant que l'angle COM soit de 45 degrés : on observera qu'alors OR = RM; ce qui donne, $y^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$. Donc, pour le point M, on a, $\varphi = \frac{m(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} g}{b\sqrt{(a^4 + b^4)}}$, tandis que, pour le point C, on a, $\varphi = mg$. Ainsi la pression au sommet C est à la pression au point M de 45 degrés, comme $b\sqrt{(a^4 + b^4)}$, est à $(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}$: rapport qui devient celui de 1 à 2, lorsque $a = b$, ou lorsque la courbe ACA' est un demi-cercle.

Les grandes augmentations de pression se font depuis les points de 45 degrés jusqu'aux naissances de la voûte. Il est donc essentiel en général de fortifier beaucoup les voûtes circulaires et elliptiques depuis les reins jusqu'aux naissances. C'est en effet par-là que ces sortes de voûtes périssent ordinairement.

Exemple II.

15. Les *directions des forces* φ *étant supposées perpendiculaires à la courbe* ACA' (Fig. 4); *on demande l'expression générale de* φ, *quelle que soit cette courbe dont la nature est donnée.*

On a ici, comme dans l'art. 11, sin. $u = \frac{dx}{ds}$, cos. $u = \frac{dy}{ds}$; et, en procédant comme dans ce même article, on trouve, $\varphi R = A^2$, ou $\varphi = \frac{A^2}{R}$. Ainsi on aura φ, en mettant pour R sa valeur donnée par la nature de la courbe.

COROLLAIRE.

16. SOIT ACA' une demi-ellipse, dont le demi-axe CO $= a$, le demi-axe OA $= b$: on trouvera, $R = \frac{(b^4 + a^2 y^2 - b^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^4}$; et par conséquent

$$\varphi = \frac{A^2\, ab^4}{(b^4 + a^2 y^2 - b^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La pression au sommet C étant supposée représentée par mg, on aura, $mg = \frac{A^2\, a}{b^2}$, ou $A^2 = \frac{b^2 mg}{a}$.

De là il suit que la pression au sommet C, ou $y = 0$, est à la pression aux naissances A, A', ou $y = b$, comme a^3 est à b^3; et que la pression au sommet C est à la pression au point de 45 degrés, ou $y^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$, comme $(a^4 + b^4)^{\frac{3}{2}}$ est à $b^3 (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}$. Ainsi les pressions des voussoirs doivent augmenter ou diminuer depuis la clef jusqu'aux impostes, selon que la voûte est surbaissée ou surmontée. Je n'ai pas besoin d'ajouter que les pressions doivent être par-tout les mêmes, lorsque la voûte est en plein ceintre, ou lorsque $b = a$.

PROBLÊME II.

17. LE *système de tous les voussoirs dont la voûte est composée, étant supposé en équilibre; on demande l'épaisseur que les pieds droits doivent avoir pour en soutenir la poussée.*

Puisque toutes les parties de la voûte sont en équilibre, et qu'on la peut conséquemment regarder comme un tout continu, on voit que la question se réduit à mettre en équilibre, entre deux plans inclinés représentés par les deux joints inférieurs extrêmes de la voûte, cette même voûte dont la figure est donnée, et dont le poids est aussi donné ou déterminable par la nature de l'intrados et des forces qui le pressent.

Exemple I.

18. La *courbe* ACA′ (Fig. 7) *est une chaînette retournée; tous les voussoirs, regardés comme infiniment petits, sont égaux et également pesants* (Art. 7); *les points* A, A′, *sont à même hauteur : il s'agit de déterminer l'épaisseur* DF *qu'il faut donner au pied droit* AF, *considéré comme un rectangle solide, qui tend à se renverser en tournant autour du point fixe* F.

Ayant fait l'abscisse CR $= x$, l'ordonnée MR $= y$, l'arc élémentaire Mm $= ds$, la montée CO $= a$, la demi-base OA $= b$: on a, pour l'équation différentielle de la courbe, $dy = \frac{Adx}{\sqrt{(2Ax+xx)}}$; et de là on a (8), entre les trois quantités A, a, b, l'équation $b = \text{A.L.}\left(\frac{A+a+\sqrt{(2Aa+aa)}}{A}\right)$. Ainsi on doit regarder A comme donné.

Chaque point de l'élément ds étant pressé verticalement par la gravité g, la force appliquée à tous les points de ds est gds. Or, à cause de $dy = \frac{Adx}{\sqrt{(2Ax+xx)}}$, on trouve, $ds = \frac{Adx+xdx}{\sqrt{(2Ax+xx)}}$; et par conséquent $s = \sqrt{(2Ax+xx)}$. Ainsi, en faisant $x = a$, on aura, $\sqrt{(2Aa+aa)}$ pour la longueur de l'arc CA, et $2\sqrt{(2Aa+aa)}$ pour celle de l'intrados entier ACA′. Soit la petite épaisseur Co du voussoir du sommet $= c$: le poids total de la voûte sera, $2gc \times \sqrt{(2Aa+aa)}$. Je représente l'aire $2c\sqrt{(2Aa+aa)}$ par la simple lettre M, afin d'abréger.

L'action du poids gM s'exerce suivant la verticale QCO. Par les points extrêmes A, A' de la courbe, je mene les deux tangentes AQ, A'Q, qui se rencontrent en Q sur la verticale OC prolongée indéfiniment; et, ayant pris QN pour représenter le poids gM, je décompose cette force en deux autres QI, QS. On aura, *Force* $\mathrm{QI} = gM \times \frac{\sin.\mathrm{AQO}}{\sin.2\mathrm{AQO}} = \frac{gM}{2\cos.\mathrm{AQO}} = \frac{gM(A+a)}{2\sqrt{(2Aa+aa)}}$, en observant qu'en général le cosinus de l'angle que forme l'élément ds avec la verticale, a pour valeur $\frac{dx}{ds}$ ou $\frac{\sqrt{(2Ax+xx)}}{A+x}$, et puis faisant $x = a$. Je suppose que la force QI soit appliquée au point A de sa direction, et ensuite décomposée en deux autres, l'une horizontale, l'autre verticale. La valeur de la premiere de ces deux dernieres forces est en général *Force* QI $\times \frac{dy}{ds}$ ou *Force* QI $\times \frac{A}{A+x}$; et la valeur de l'autre est, *Force* QI $\times$ $\frac{dx}{ds}$ ou *Force* QI $\times \frac{\sqrt{(2Ax+xx)}}{A+x}$. Donc, en faisant $x = a$, et mettant pour *Force* QI sa valeur, l'expression de la force horizontale, au point A, sera $\frac{gM.A}{2\sqrt{(2Aa+aa)}}$, et celle de la force verticale sera $\frac{gM}{2}$. Or la force horizontale tend à renverser le pied droit autour du point F, et la force verticale concourt, avec le poids du pied droit, à maintenir ce même pied droit sur sa base. Ainsi, en nommant h la hauteur donnée AD du pied droit, z sa base inconnue DF, et par conséquent ghz son poids, on aura l'équation d'équilibre:

$$\frac{gM.A.h}{2\sqrt{(2Aa+aa)}} = \frac{gM.z}{2} + \frac{ghz^2}{2};$$

d'où l'on tire (en faisant, pour abréger, $\frac{A}{\sqrt{(2Aa+aa)}} = n$),

$$z = \frac{-M}{2h} + \frac{\sqrt{(M^2+4nMh^2)}}{2h}.$$

Je n'emploie que le signe supérieur du radical, pour que la valeur de z soit positive.

Les applications numériques sont trop faciles pour nous y arrêter.

Exemple II.

19. Soit *l'intrados* ACA′ (Fig. 8) *une parabole dont l'axe* CO *est vertical; et que toutes les forces* φ *agissent verticalement.*

Toutes les forces φ sont paralleles, mais ne sont pas égales en quantités comme dans l'exemple précédent, et il faut commencer par trouver leur somme ou leur résultante.

Supposons $CO = a$, $OA = b$, le parametre de la parabole $= \frac{b^2}{a} = k$; l'abscisse quelconque $CR = x$, l'ordonnée $RM = y$; l'élément Mm de la courbe $= ds$.

On a ici, sin. $u = 0$, cos. $u = 1$; et on trouve d'abord en général (art. 13), $\varphi = \frac{A^2 ds^2}{R dy^2}$. Mettant pour la fraction $\frac{ds^2}{R dy^2}$ sa valeur $\frac{2}{\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}$, donnée ici en k et y, par la nature de la parabole, on aura, $\varphi = \frac{2A^2}{\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}$.

Supposons qu'au sommet C la valeur de la force φ soit cg, g étant la gravité ordinaire, c une ligne constante, qui exprime l'épaisseur de la voûte au sommet: on aura, $cg = \frac{2A^2}{k}$, et par conséquent $2A^2 = kcg$. Ainsi, en général, $\varphi = \frac{kcg}{\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}$.

Maintenant, la pression verticale que souffre chaque point de ds étant $\frac{kcg}{\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}$, la pression totale de ds sera, $\frac{kcgds}{\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}$. Mettant pour ds sa valeur $\frac{dy\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}{k}$, cette pression deviendra, $cgdy$; et la pression sur l'arc fini $CM = cgy$; la pression sur $CA = cgb$; et enfin la pression sur l'intrados entier $ACA' = 2cbg$.

Par les points extrêmes A, A′, menons à la parabole les

tangentes AQ, A'Q, qui vont se rencontrer au point Q, sur le prolongement de l'axe CO. En procédant comme dans l'exemple précédent, je prends QN pour représenter la force $2cbg$; et je décompose cette force en deux autres QI, QS. La force QI a pour valeur $2bcg \times \frac{\sin. AQO}{\sin. 2AQO}$ ou $bcg \times \frac{AQ}{OQ}$.

J'applique cette force au point A, et je la décompose en deux autres, l'une horizontale, qui tend à renverser le pied droit, l'autre verticale, qui concourt, avec le poids du pied droit, à l'affermir sur sa base. La premiere a pour valeur, $bcg \times \frac{AQ}{OQ} \times \frac{OA}{AQ}$, ou $bcg \times \frac{OA}{OQ}$, ou enfin $\frac{b^2cg}{2a}$; la seconde a pour valeur bcg. Ainsi, en faisant $AD = h$, $DF = z$, l'équation d'équilibre sera $\frac{gb^2ch}{2a} = gbcz + \frac{ghz^2}{2}$; d'où l'on tire, $z = -\frac{bc}{h} + \frac{\sqrt{\left(b^2c^2 + \frac{b^2ch^2}{a}\right)}}{h}$.

CHAPITRE III.

De la figure qu'il faut donner aux faces latérales extérieures des pieds droits, lorsqu'ils peuvent se rompre par assises horizontales.

20. J'AI regardé jusqu'ici les pieds droits d'une voûte comme des massifs rectangulaires continus, qui ne peuvent que se renverser sans se rompre. Mais il peut arriver qu'un pied droit ne résiste pas également sur toute sa hauteur, et qu'une partie tende à se séparer de l'autre, suivant une section horizontale, comme une piece de bois se rompt sous

la charge d'un poids, avec cette différence néanmoins que la piece de bois, composée de fibres extensibles, plie d'abord avant que de se rompre, au lieu qu'un massif de maçonnerie se rompt subitement et sans plier. Je vais donc supposer que la face intérieure d'un pied droit formant toujours une droite verticale, la face extérieure doive avoir une certaine courbure, telle que le pied droit puisse se diviser par sections horizontales, et demeure cependant en équilibre, par la force d'adhérence des parties, combinée avec les efforts de la pesanteur. M. Æpinus a traité une question semblable dans les mémoires de l'académie de Berlin, pour l'année 1755 : il regarde la partie supérieure d'une voûte comme un coin qui fait effort pour écarter tout le reste du massif inférieur, considéré comme un seul corps qui tend à se diviser par sections horizontales. Mais, dans cet effort qui s'exerce perpendiculairement aux deux plans inclinés formés par les coussinets, il n'a égard qu'à la force horizontale, et il néglige la force verticale, qui en provient aussi; omission qui facilite le problême, mais qui n'est pas permise. On ne doit donc pas être surpris si M. Æpinus et moi sommes parvenus à des résultats fort différents.

Problème.

21. La *voûte* ACA′a′ca (Fig. 9) *étant considérée comme un corps solide placé entre deux plans inclinés* Aa, A′ a′, *qui représentent les coussinets : on demande la courbe* AMF, *que doit former la face extérieure du pied droit* AF, *dans l'état d'équilibre, la face intérieure* AD *étant une droite verticale, et le pied droit étant supposé arrêté solidement par sa base, et n'ayant d'autre liberté que de pouvoir se rompre par sections horizontales.*

Soient AP et PM les coordonnées perpendiculaires de la courbe AMF, pour le point quelconque M. Ayant mené par les points A, A′, perpendiculairement aux coussinets, ou joints extrêmes Aa, A′ a′, les droites AQ, A′Q, qui vont se

rencontrer en Q sur le prolonment de l'axe vertical, je prends QN pour représenter le poids de la voûte ; je décompose ce poids en deux forces QI, QS ; je suppose que la force QI soit appliquée en A, et représentée par $Ah = QI$: je décompose la force Ah en deux autres, l'une horizontale Aq, l'autre verticale Af.

Cela posé, on voit que la force horizontale Aq tend à renverser le massif APM autour du point M, tandis qu'au contraire la force verticale Af, le poids du massif APM, et la force d'adhérence des deux parties APM, PDFM, tendent à produire une rotation contraire, et conséquemment à maintenir la partie APM sur la base PM. Il ne s'agit donc que d'établir l'équilibre entre ces quatre forces.

Soient
- la gravité . . . . $= g$,
- le sinus total . . . . $= 1$,
- l'angle AQO . . . . $= m$,
- l'angle AQA′ . . . . $= n$,
- AP . . . . $= x$,
- PM . . . . $= y$,
- la force QN . . . . $= gQ$,
- (Q étant une surface donnée.)

On aura d'abord évidemment, Force $Ah = gQ \times \frac{\sin. m}{\sin. n}$; Force $Aq = gQ \times \frac{(\sin. m)^2}{\sin. n}$; Force $Af = gQ \times \frac{\sin. m \cos. m}{\sin. n}$; le poids du massif $APM = g\int y\,dx$. Nous ferons, pour abréger, $\frac{Q \sin. m^2}{\sin. n} = V$, $\frac{Q \sin. m. \cos. m}{\sin. n} = T$.

En considérant les moments des deux forces Aq, Af, et celui du poids APML, relativement au point M, on aura :

Moment de Force $Aq = gVx$,

Moment de Force $Af = gTy$,

Moment du poids $APM = g\int y\,dx \left(y - \frac{\int yy\,dx}{2\int y\,dx}\right) = gy\int y\,dx - g\int \frac{yy\,dx}{2}$.

La force d'adhérence des deux parties APM, PDFM du pied droit, doit être considérée comme la somme ou la résultante d'une infinité de poids égaux, représentés chacun par une ligne donnée k, lesquels seroient attachés à tous les points de la ligne PM. Cette force résultante a donc pour valeur gky, et sa direction passe par le milieu de PM; d'où il suit que son moment par rapport au point M est $\frac{gky^2}{2}$.

De toutes ces expressions des moments des forces qui doivent se faire équilibre, il résulte que l'équation de cet équilibre est (en divisant tout par g),

$$(X) \quad Vx = Ty + y\int y\,dx - \frac{\int yy\,dx}{2} + \frac{ky^2}{2}.$$

Différencions les deux membres de cette équation, nous aurons : $V dx = T dy + dy\int y dx + \frac{yydx}{2} + kydy$.

Différencions encore, en faisant dy constante; il nous viendra : $Vd^2x = 2ydxdy + \frac{y^2 d^2x}{2} + kdy^2$.

Maintenant, je fais $dx = zdy$, et par conséquent $d^2x = dzdy$; ce qui change l'équation précédente en celle-ci :

$$(2V - y^2)\,dz - 4yzdy - 2kdy = 0.$$

Multiplions tout par $2V - y^2$; nous aurons,

$$(2V - y^2)^2 dz - 4yzdy(2V - y^2) - 2kdy(2V - y^2) = 0,$$

dont l'intégrale est, $(2V - y^2)^2 . z - 4kVy + \frac{2ky^3}{3} = A$.

Remettons pour z sa valeur $\frac{dx}{dy}$; nous aurons,

$$(2V - y^2)^2 dx - 4kVydy + \frac{2ky^3dy}{3} = Ady,$$

ou, $dx = \frac{\left(A + 4kVy + \frac{2ky^3}{3}\right)dy}{(2V - y^2)^2}$: équation séparée, dont le second membre est intégrable, en partie algébriquement, en partie par les logarithmes. En effectuant cette intégration, on aura une équation finie entre x et y, et les

quantités données ; équation dans laquelle entrera une seconde constante B.

Pour déterminer les deux constantes A et B, on observera, 1°. qu'en faisant $x = 0$, le premier membre de l'équation générale (X) devient zéro ; et que les trois derniers termes du second membre, relatifs au massif APM qui devient aussi zéro, s'évanouissent également ; d'où résulte $Ty = 0$, et par conséquent $y = 0$. Ainsi $x = 0$ donne $y = 0$; ce qui produit, entre A et B et les données du probléme, une premiere équation. 2°. La position du coussinet Aa étant donnée ; si on la suppose, par exemple, perpendiculaire à la courbe AMF, on aura, à l'origine, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin. m}{\cos. m}$; ce qui donne une seconde équation de condition entre A et B et les constantes : on connoîtra donc A et B. Faisant ensuite $x = AD = h$ dans l'équation finale entre x et y, on aura la valeur de la derniere ordonnée ou l'épaisseur du pied droit à la base.

SECTION II.

De l'équilibre des voûtes en dôme.

22. La théorie que j'ai donnée dans la section précédente pour l'équilibre des voûtes en berceau s'applique aussi aux voûtes en dôme, sauf les modifications ou différences qui résultent de la différente maniere dont ces deux especes de voûtes sont engendrées. On sait que les premieres sont produites par le mouvement d'une courbe qui se meut parallèlement à elle-même, les autres par le mouvement de révolution d'une courbe autour d'un axe vertical ; mais, de même qu'une voûte en berceau peut être regardée comme l'assemblage d'une infinité de voûtes infiniment minces, posées parallèlement les unes à côté des autres, il

faut imaginer dans les voûtes en dôme une infinité de plans qui se coupent suivant l'axe de révolution, et qui par-là déterminent une infinité de voûtes élémentaires, faisant des angles entre elles, et augmentant de largeur depuis le sommet jusqu'aux impostes. Alors la question sera d'établir les conditions de l'équilibre pour ces voûtes partielles, dont chacune est composée de deux onglets égaux et semblables, posés de part et d'autre de l'axe.

Il est évident que si les voûtes en forme de dôme, au lieu d'avoir pour bases des cercles, ce qui est le cas le plus ordinaire, et comme je le suppose ici, avoient pour bases des ellipses, des polygones réguliers symétriques, on pourroit également les décomposer en voûtes partielles et élémentaires, dans lesquelles les conditions de l'équilibre s'établiroient par les mêmes moyens que je vais employer pour les voûtes en dôme proprement dites.

CHAPITRE I.

Détermination de l'épaisseur qu'il faut donner aux pieds d'une voûte en dôme, pour résister à la poussée de la calotte supérieure, considérée comme un corps détaché.

---

23. Le problême dont il s'agit ici est analogue à celui de la Hire pour les voûtes en berceau ; et il étoit entièrement nouveau, lorsque j'en donnai la solution à l'académie des sciences, en 1770, à l'occasion du dôme de Sainte-Genevieve, comme je l'ai déja dit. Quelques mécaniciens avoient déterminé l'épaisseur des pieds droits de ce dôme, d'après la formule de la Hire ; mais cette solution étoit purement hypothétique et insuffisante, vu la diversité des deux cas.

PROBLÊME.

24. SOIT (Fig. 10) *un dôme produit par la révolution de l'espace compris entre la courbe d'intrados* ACA' *et la courbe d'extrados* aca' *autour de la montée verticale* OCc : *supposons que ce dôme tende à se rompre suivant les directions données des joints* XZ, X'Z', *inclinés à l'horizon, et perpendiculaires à la courbe d'intrados, de maniere que la partie supérieure* ZXcX'Z'C *puisse être regardée comme un seul et même corps, et que la partie* AZXa (il en est de même pour l'autre côté de la voûte) *ne fasse, avec le pied droit correspondant* ADFT, *qu'un seul et même massif solide dans toute son étendue, lequel se renverse sur le point* F *lorsque la voûte vient à se désunir : on demande l'épaisseur* DF *que doit avoir ce pied droit pour l'équilibre.*

I.

SUIVANT l'idée générale qui a été indiquée (Art. 22), je fais passer par l'axe vertical YOC du dôme deux plans YKL*tx*cC, Y*kln*ξcC, qui font entre eux un angle infiniment petit, et qui, étant prolongés convenablement, déterminent de part et d'autre de l'axe deux onglets égaux et correspondants dans la partie supérieure du dôme, et deux onglets aussi égaux et correspondants dans la partie inférieure. Pour qu'il y ait équilibre, il faut qu'il se trouve dans la direction QCO du poids de la calotte ZX*c*X'Z'C un point Q duquel on puisse abaisser deux perpendiculaires sur les joints XZ, X'Z'. Représentons le poids dont il s'agit par QN, et décomposons cette force en deux autres QI, QS, lesquelles exprimeront les efforts que le systême des deux onglets supérieurs exerce contre le systême des deux onglets inférieurs.

II.

Imaginons que la force QI soit appliquée au point G de sa direction, et représentée par $Gh = QI$: décomposons la force Gh en deux autres forces Gq, Gf, l'une horizontale, l'autre verticale. On voit que la force horizontale Gq tend à renverser l'onglet inférieur autour du point moyen F, ou plutôt de la petite droite LFl, perpendiculaire à la section moyenne YFTAZX; et qu'au contraire la force verticale Gf conspire, avec le poids de l'onglet, à maintenir ce même onglet. Il ne s'agit donc plus que d'établir l'équation d'équilibre, d'après cette considération.

Pour abréger un peu le calcul, à la portion d'onglet, représentée par son profil moyen $AaXZ$, je substituerai un onglet de même base et de même hauteur, représenté par son profil moyen $Aax\lambda$; ce qui est très permis. D'ailleurs il sera facile, dans chaque cas particulier, d'avoir égard à la véritable figure de l'onglet, si on le juge à propos. De plus, je prendrai la gravité $= 1$, tout le système étant supposé d'une même matiere homogene.

III.

Qu'on mene du point indéterminé R de l'axe les droites RP, Rr, Rp, dans le plan moyen vertical des onglets, et dans les deux plans verticaux qui les terminent. Soient tirées aux petits arcs mn, pr, considérés comme des lignes droites, les petits arcs ou droites infiniment voisines $d\delta$, $e\iota$.

Supposons

le sinus total ou le rayon . . . . $= 1$,
l'angle donné OQG . . . . $= m$,
l'angle infiniment petit LYl ou pRr . . . . . $= \varpi$,
OA ou RM . . . . $= b$,
Aa . . . . $= c$,

AD ou TF . . . . $= h$,
A ou VG . . . . $= k$,
AV ou DH . . . . $= i$,
Rz . . . . $= y$,
le double onglet produit par la révolution de
ZXcX'Z'C autour de CO . . . . $= 2\varpi.S$
(S étant une quantité donnée par la figure du dôme),
l'épaisseur inconnue DF du pied droit . . . $= z$.

On aura, Force $Gh = \frac{2\varpi S. \sin. m}{\sin. 2m}$; Force $Gq = \frac{2\varpi S. (\sin. m)^2}{\sin. 2m}$ $= \varpi S.$ tang. m; Force $Gf = \varpi S$. Alors si l'on considere les moments des deux forces Gq, Gf, par rapport au point F, on aura,

Moment de Force $Gq - \varpi S.$ tang. $m \times (h + k)$,
Moment de Force $Gf. = \varpi S \times (i + z)$.

Le petit trapeze $d\delta_i e = zi \times d\delta = \varpi y dy$; et son moment, par rapport au point F, est $\varpi y dy. (b + z - y)$, dont l'intégrale est $\frac{\varpi (b+z) y^2}{2} - \frac{\varpi y^3}{3} + A$: intégrale qui, devant s'évanouir lorsque $y = b$, et recevoir sa valeur complete lorsque $y = b + z$, devient finalement $\frac{\varpi (z^3 + 3bz^2)}{6}$. Cette expression étant le moment de la tranche $mnrp$, et l'onglet $\varphi K k l L t u$ étant composé d'une infinité de ces tranches, toutes égales, et posées les unes sur les autres, le moment de cet onglet est, $\frac{\varpi h (z^3 + 3bz^2)}{6}$.

En appliquant le même calcul à l'onglet représenté par le profil $A\lambda xa$, et observant qu'alors l'intégrale $\frac{\varpi (b+z) y^2}{2} - \frac{\varpi y^3}{3} + A$, doit s'évanouir lorsque $y = b$, et recevoir sa valeur complete lorsque $y = b + c$, on trouvera que le moment de cet onglet est, $\frac{\varpi k}{6} (6bcz + 3c^2 z - 3bc^2 - 2c^3)$.

Égalant le moment de la force Gzq à la somme des trois

autres moments, et ôtant le facteur commun ϖ, on aura l'équation fondamentale d'équilibre :

(A) $S \text{ tang. } m(h+k) = S(i+z) + \frac{h(z^2+3bz^2)}{6} + \frac{k(6bcz+3c^2z-3bc^2-2c^3)}{6}$; équation du troisieme degré, qui fera connoître z ou l'épaisseur DF du pied droit.

REMARQUE I.

25. Il arrive souvent que le dôme porte à son sommet une espece de lanterne, qui peut former une charge considérable : alors il faut chercher d'abord, par le détail des parties de cette lanterne, la masse totale qui en résulte; puis on convertira cette masse en un cylindre V (Fig. 11) concentrique au dôme, de même matiere que lui, et ayant une base et une hauteur données l'une et l'autre.

Cela posé, j'observe que les deux plans verticaux qui nous ont déterminé en bas le double onglet $2\varpi S$, déterminent aussi dans le cylindre V un double onglet correspondant, dont l'effort s'ajoute à celui de $2\varpi S$, et dont il faut trouver la valeur. Or, si l'on nomme Π le rapport de la circonférence au diametre, r le rayon de la base du cylindre V, $2f$ sa hauteur, on aura d'abord, $2\Pi r$ pour la circonférence du cylindre, et $2\Pi r^2 f$ pour la solidité de ce cylindre. Ensuite, en considérant que l'arc ϖ a l'unité pour rayon, et que par conséquent l'arc qui lui répond sur la circonférence de la base du cylindre V est, $\frac{\varpi r}{1}$: si l'on fait cette proportion, $2\Pi r : 2\varpi r :: 2\Pi r^2 f$: un quatrieme terme, ce quatrieme terme $2\varpi r^2 f$ sera le double de l'onglet demandé. Ainsi l'équation de l'article précédent s'appliquera ici, en mettant $2\varpi S + 2\varpi r^2 f$ à la place de $2\varpi S$, ou $S + r^2 f$ à la place de S, tout le reste demeurant d'ailleurs le même.

REMARQUE. II.

26. LA partie supérieure des pieds droits est ordinairement couronnée par un attique, dont le poids concourt, avec celui des autres constructions, à charger les pieds droits. Cet attique peut être regardé comme une espece de tour annulaire, représentée au profil par le rectangle *adke*, et faisant corps avec le pied droit de la partie inférieure du dôme; ce qui tendra à diminuer l'épaisseur DF et à la réduire à une autre Df. En supposant la base ae de la tour annulaire $= p$, la hauteur $ad = q$, l'épaisseur actuelle D$f = u$, OA + A$a = b + c = \gamma$, on trouvera, comme on a fait pour l'onglet Aλxa (24, nº. III), que le moment de l'onglet représenté par *adke*, est représenté par $\frac{\varpi q(6\gamma pu + 3p^2u - 3\gamma p^2 - 2p^3)}{6}$: expression qu'il faudra ajouter au second membre de l'équation générale (A), après avoir écrit u pour z. De plus, pour avoir égard au poids de la lanterne V, il faudra mettre S $+ r^2 f$ à la place de S. Par-là, on aura toujours une équation du troisieme degré, de laquelle on tirera la valeur de l'inconnue u.

REMARQUE III.

27. COMME on est maître d'augmenter plus ou moins le massif de l'attique, nous pouvons faire entrer d'une autre maniere ce massif dans le calcul. Supposons, pour cela, que, tout restant d'ailleurs le même que dans l'article 25, le profil de l'attique soit représenté par le rectangle Aigm, dont la base Am est égale à la base (inconnue) Df du pied droit, et dont la hauteur donnée A$i = q$. Alors nous aurons un pied droit Digf, dont la hauteur donnée iD ou $gf =$ DA + A$i = h + q$; quantité que nous représentons par la simple lettre H. De là, en faisant l'inconnue ac-

27.

tuelle $Df = t$, on trouvera, par les articles 24 et 25,

$$(B) \quad t^3 + 3bt^2 + \frac{[6(S+r^2f)+k(6bc+3c^2)]}{H}t + \frac{6(S+r^2f)i - k(3bc^2+2c^3) - 6(S+r^2f)\,\text{tang.}\,m.\,(h+k)}{H} = 0:$$

équation d'équilibre, d'un usage commode dans la pratique.

Les données qui entrent dans cette équation dépendent de la nature de la courbe génératrice du dôme, et de la position du point Z, où le dôme est supposé se rompre.

Remarque IV.

28. Selon quelques experiences, le point de rupture Z est placé à l'intersection de la courbe ACA' avec la diagonale OK du rectangle OCKA.

J'adopte ici cette hypothese, qui doit être sensiblement conforme à la vérité, sur-tout pour les dômes surmontés; ce qui est le cas le plus ordinaire. De plus, je supposerai que la courbe d'intrados ACA' est une parabole, comme elle l'est en effet dans le dôme du Panthéon français, que j'ai principalement en vue dans tout ceci. Je regarderai aussi l'extrados *aca'* comme une parabole, au moins sensiblement.

Détermination générale des données du problême, suivant l'article précédent.

29. Soient $OC = a$, $OA = b$; $Oc = a'$, $Oa = b'$; et nommons toujours $\frac{\Pi}{1}$ le rapport de la circonférence au diametre, ou $\frac{2\Pi}{1}$ le rapport de la circonférence au rayon.

Les triangles rectangles semblables OCK, OEZ donnent, $EZ = \frac{OE \times CK}{OC}$, ou $(EZ)^2 = \frac{(OE)^2 \times (CK)^2}{(OC)^2}$; et la propriété de la parabole donne, $(EZ)^2 = CE \times \frac{b^2}{a} =$

$(OC - OE) \times \frac{b^2}{a}$. Égalant entre elles ces deux valeurs de $(EZ)^2$, et dégageant OE, on trouvera, $OE = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$. Donc $EZ = \frac{b(\sqrt{5}-1)}{2}$ et $CE = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$.

Supposons que ACA′ (Fig. 10) soit la parabole intérieure de notre dôme; que le point G se confonde avec le point Z; et menons l'ordonnée ZE, qui est la même que l'ordonnée ZE de la Figure 11. La droite GQ ou ZQ étant perpendiculaire au joint ZX, ou tangente en Z à la parabole, l'angle ZQE ou GQO, que nous avons nommé m, a pour expression de sa tangente, $\frac{ZE}{QE}$. Ainsi tang. $m = \frac{ZE}{QE} = \frac{ZE}{2CE} = \frac{b(\sqrt{5}-1)}{2a(3-\sqrt{5})} = \frac{b}{a(\sqrt{5}-1)}$.

Le paraboloïde, produit par une révolution entiere du segment parabolique CEZ autour de CE, a pour valeur $\Pi(EZ)^2 \times \frac{CE}{2}$, ou $\frac{\Pi ab^2 \times (7-3\sqrt{5})}{4}$; et de même le paraboloïde, produit par la révolution du segment parabolique cEz autour de cE, a pour valeur, $\frac{\Pi a' b'^2 \times (7-3\sqrt{5})}{4}$. Appelons pour un moment N l'excès du second paraboloïde sur le premier. Je n'ai aucun égard au petit solide produit par le triangle mixtiligne ZXz.

Dans l'expression $2\varpi . S$ du double onglet de l'article 24, l'arc élémentaire ϖ a l'unité pour rayon, et 2Π est la circonférence entiere pour le même rayon 1 : on aura donc ici la proportion, $2\Pi : 2\varpi :: N : 2\varpi . S$; et par conséquent $S = \frac{N}{2\Pi} = \frac{(a'b'^2 - ab^2) \times (7-3\sqrt{5})}{8}$.

Tout le reste est donné immédiatement par les dimensions particulieres du dôme.

Application de la théorie précédente au dôme du Panthéon français.

30. Dans ce dôme, la parabole ACA′ est telle qu'en menant les cordes CA, CA′, le triangle est équilatéral; et on a, AA′ = AC = CA′ = 64 pieds; ce qui donne, OC = 55,425 pieds; la hauteur AD du pied droit = 44 pieds; la hauteur réduite Ai de l'attique = 20 pieds; l'épaisseur Aa de la voûte à sa naissance = 3 pieds, et l'épaisseur Cc, au sommet, = 1 pied 6 pouces; enfin la lanterne se réduit à un cylindre V, qui a pour base un cercle de 15 pieds de diametre, et pour hauteur 10 pieds.

Nous évaluerons toutes nos quantités en pieds linéaires, pieds quarrés, pieds cubes, selon que ces quantités seront des lignes, des superficies, ou des solides.

On a, $a = 55,425$; $b = 32$; $a' = 56,925$; $b' = 35$; $c = 3$; $k = A\lambda = OE = 34,253$; $i = AV = AO - ZE = 12,224$; $h = 44$; $q = 20$; $H = h + q = 64$; $r = 7,5$; $2f = 10$; $S = 473,694$; $r^2f = 281,25$; tang. $m = 0,467$, nombre absolu. Substituant toutes ces valeurs dans l'équation (B), elle deviendra:

$$t^3 + 96t^2 + 393,503t - 2105,659 = 0.$$

Or, la valeur de t, qui satisfait à cette équation, est à peu de chose près, 3,25. Ainsi l'épaisseur du pied droit doit être de 3 pieds 3 pouces environ, pour le simple état d'équilibre.

Si, toutes les autres dimensions demeurant d'ailleurs les mêmes, on donnoit 4 pieds d'épaisseur à la naissance Aa de la voûte, 2 pieds d'épaisseur Cc au sommet, et 20 pieds de hauteur au cylindre V, qui représente le poids de la terre, on trouveroit pour t une valeur d'un peu plus de 4 pieds.

Souflot a donné 5 pieds 8 pouces d'épaisseur aux pieds droits dans les parties les plus foibles, et 16 pieds aussi d'épaisseur dans les quatre principales parties qui répondent aux centres des piliers destinés à porter le dôme.

On voit par-là qu'il n'y avoit pas à craindre que les pieds droits fussent renversés. Ils n'ont éprouvé en effet aucun mouvement de cette nature. Les colonnes ont été écrasées par une autre cause que j'ai déja indiquée.

CHAPITRE II.

Conditions de l'équilibre entre toutes les parties d'une voûte en dôme.

31. Il ne s'agit plus ici d'un dôme qui se désunisse par masses finies : il faut maintenant regarder le dôme comme composé d'une infinité de voussoirs qui doivent se faire mutuellement équilibre, et chercher la relation générale qui existe pour cela entre la figure de la courbe génératrice du dôme et les forces qui agissent sur les voussoirs ; problême analogue à celui qui a été résolu pour les voûtes en berceau dans le chapitre II de la section précédente. On déterminera ensuite l'épaisseur des pieds droits, d'après cet équilibre préliminairement indispensable.

Problême.

32. Déterminer *les conditions de l'équilibre entre les forces qui agissent sur les voussoirs infiniment petits d'un dôme.*

Soit l'espace ACO (Fig. 2) terminé par la montée CO, l'ordonnée OA de la courbe AC, lequel, par sa révolution autour de la montée CO, produit le solide qui rempliroit l'intérieur du dôme. Je commence par faire, relativement à la courbe CA, la même construction et les mêmes raisonnements qui ont été faits pour les voûtes en berceau, dans

l'article 4, en observant de plus qu'alors les faces latérales ou les joints des voussoirs formoient des plans inclinés; au lieu que dans les dômes ces faces sont situées dans des plans verticaux qui vont tous se couper suivant l'axe de la voûte. On voit, par cette observation, que les voussoirs des voûtes en berceau peuvent être représentés par des surfaces, mais que ceux des voûtes en dôme ont les trois dimensions, et forment des especes de pyramides tronquées.

Soient (Fig. 4)

CR . . . . $= x$,
CR′ . . . . $= x'$,
CR″ . . . . $= x''$,
MR . . . . $= y$,
NR′ . . . . $= y'$,
PR″ . . . . $= y''$,
chacun des trois éléments égaux MN, NP, PQ . $= ds$,
le rayon osculateur MI . . . . $=$ R,
le rayon osculateur suivant NI . . . . $=$ R′,
l'angle élémentaire décrit par l'ordonnée MR, autour du point R, pour le rayon 1 . . . . $= \varpi$,
la force absolue qui pousse le trapeze élémentaire, décrit par MN, pour l'angle ϖ . . . . $=$ F,
la force absolue consécutive à F . . . . . . $=$ F′,
les forces qui agissent sur chaque point des deux trapezes consécutifs . . . . φ et φ',
l'angle CZF de la force F ou φ avec l'axe . . $= u$,
l'angle consécutif à u . . . . $= u'$.

En procédant comme dans l'article cité, nous aurons d'abord, $\frac{F}{F'} = \frac{R'}{R} \times \frac{(dy'' \cos. u' + dx'' \sin. u')}{dy \cos. u + dx \sin. u}$.

Or, $F = \varpi . \varphi y ds$; $F' = F + dF = \varpi . (\varphi y ds + dsd(\varphi y))$; $R' = R + dR$; $dy'' = d(y' + dy') = d(y + 2dy + d^2y) = dy + 2d^2y + d^3y$; $d''x = dx + 2d^2x + d^3x$; $\cos. u' = \cos. u + d(\cos. u)$; $\sin. u' = \sin. u + d(\sin. u)$. Ainsi l'équation précédente deviendra,

$$(X)\ o=\begin{cases}\varphi y \cos. u(2Rd^2y+dRdy)+\varphi y \sin. u(2Rd^2x+dRdx)\\ +Rdy.\, d(\varphi y \cos. u)+Rdx.\, d(\varphi y \sin. u).\end{cases}$$

Par cette équation, on trouvera la nature de la courbe génératrice CA, lorsque la loi des forces φ est donnée; ou réciproquement la loi des forces φ, lorsque la courbe est donnée : ce qui forme deux questions de même nature que celles qu'on a considérées (6) pour les voûtes en berceau. Je me borne à un exemple de chacune, pour les voûtes en dôme.

EXEMPLE DE LA PREMIERE QUESTION.

33. SUPPOSONS *que les forces φ soient constantes et verticales : on demande la courbe* CA.

On a ici, $\cos. u=1$, $\sin. u=0$; et l'équation (X) devient :

$$o=y(2Rd^2y+dRdy)+Rdy^2,$$

ou $o=ydy(2Rd^2y+dRdy)+Rdy^3$, dont l'intégrale est, $Ads^2=Rydy^2$. Mettant pour R sa valeur $-\frac{dsdx}{d^2y}$, on aura, $Adsd^2y+ydx^2dx=o$, ou $A\frac{d^2y}{ds}+\frac{ydy^2dx}{ds^2}=o$, ou $Ad\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{ydy^2dx}{ds^2}=o$; ce qui donne (en effectuant la différentiation indiquée), $Adsd^2y-Adyd^2s+ydy^2dx=o$, équation où il n'y a plus aucune différentielle constante. Faisons maintenant dy constante; nous aurons, $-Adyd^2s+ydy^2dx=o$, ou $-Ad^2s+ydydx=o$.

Soit $ds=zdy$; on aura, $d^2s=dzdy$; et l'équation deviendra $-Adz+ydx=o$. Donc, à cause de $dx=\sqrt{(ds^2-dy^2)}=dy\sqrt{(zz-1)}$, on aura $-Adz+ydy\sqrt{(zz-1)}=o$, ou $ydy=\frac{Adz}{\sqrt{(zz-1)}}$, dont l'intégrale est $\frac{y^2}{2}=A.L.\left(\frac{z+\sqrt{(zz-1)}}{B}\right)$. Ainsi y est une fonction connue de z; et, à cause de $dx=zdy$, x sera pareillement une fonction de z. On pourra donc construire la courbe CA.

On voit que cette courbe est différente de la *chaînette* renversée, tandis que, dans la même hypothese des forces φ, la courbe doit être une chaînette renversée pour les voûtes en berceau (7). C'est donc mal-à-propos que plusieurs praticiens emploient la chaînette renversée pour les voûtes en dôme, lorsque tous les poids des voussoirs sont supposés pressés verticalement avec des forces égales.

EXEMPLE DE LA SECONDE QUESTION.

34. LES *directions des forces* φ *étant supposées verticales, et la courbe* CA *un quart d'ellipse dont le demi-axe* $OC = a$, *le demi-axe* $OA = b$: *on demande la valeur de* ϕ.

D'abord l'équation fondamentale (X) deviendra ici,

$$o = \varphi y\,(2R\,ddy + dR\,dy) + R\,dy.\,d(\varphi y),$$

ou $o = \varphi y\,(2R\,dy\,ddy + dR\,dy^2) + R\,dy^2.\,d(\varphi y)$,

dont l'intégrale est $A\,ds^2 = \varphi y\,R\,dy^2$. Donc $\varphi = \frac{A\,ds^2}{Ry\,dy^2}$.

Or, par la nature de l'ellipse,

$$\frac{ds^2}{Ry\,dy^2} = \frac{ab^2}{y\,(b^2 - y^2)\sqrt{(b^4 - b^2y^2 + a^2y^2)}}.$$

Ainsi on aura φ en fonction de y. La constante A doit être déterminée par la condition qu'au sommet C la valeur de φ soit donnée.

SCHOLIE.

35. TOUTES les parties du dôme étant supposées en équilibre, on pourra considérer l'un de ses onglets élémentaires comme une voûte partielle, et on déterminera l'épaisseur des pieds droits qui la portent, par la méthode de l'art. 24. Je ne crois pas devoir entrer dans de nouveaux détails à ce sujet.

CHAPITRE III.

De la figure extérieure des pieds droits d'un dôme, lorsque ces pieds droits tendent à se diviser par assises horizontales.

PROBLÊME.

36. SOIT *une voûte en dôme, produite par la révolution de l'espace* ACca (Fig. 9) *autour de l'axe vertical* OCQ, *et appuyée sur ses pieds droits, suivant les joints extrêmes inférieurs, qui sont symétriquement perpendiculaires à la courbe d'intrados* ACA′: *on demande la courbe* AMF *que doit former, pour l'état d'équilibre, la face extérieure du pied droit, en supposant que la face intérieure* AD *soit verticale, que le pied droit tende à se diviser suivant les assises horizontales* PM, *par des mouvements de rotation autour des points* M, *et que d'ailleurs la base du pied droit soit solidement arrêtée.*

Nous imaginerons, comme ci-dessus, par l'axe KOCQ de la voûte, une infinité de plans verticaux, qui partagent le dôme en une infinité d'onglets; et nous allons déterminer les conditions de l'équilibre pour ces onglets, considérés comme des voûtes partielles.

Prenons QN, sur l'axe KOCQ, pour représenter la force qui résulte, lorsqu'on ajoute ensemble le poids du double onglet supérieur du dôme, et le poids du double onglet du cylindre, qui représente la lanterne dont le dôme peut être chargé au sommet; décomposons la force QN en deux autres QI, QS, perpendiculaires aux joints A*a*, A′*a*′; et

ayant fait $Ah = QI$, décomposons la force Ah en deux autres Aq, Af, l'une horizontale, l'autre verticale. Soit le petit rectangle $EE'e'e$ du second ordre, l'élément du trapézoïde $PMmp$.

Soient,

le sinus total . . . . $= 1$,
l'angle OQA . . . . $= m$,
l'angle élémentaire que décrit la courbe génératrice du dôme . . . . $= \varpi$,
le double onglet élémentaire produit par le mouvement de l'aire $Aaca'A'$ autour de la montée . . . . $= 2\varpi . S$,
CO . . . . $= a$,
OA ou RP . . . . $= b$,
le rayon ou la base du cylindre qui tient lieu de la lanterne . . . . $= r$,
la hauteur de ce cylindre . . . . $= 2f$,
l'abscisse AP de la courbe AMF . . . . $= x$,
l'ordonnée PM . . . . $= y$,
la droite RE . . . . $= t$.

1°. On aura, Force $Ah = \frac{2\varpi (S + r^2 f) \sin. m}{\sin. 2m}$; Force $Aq = \varpi . (S + r^2 f) . \text{tang.}\, m$; Force $Af = \varpi (S + r^2 f)$. Ainsi, en considérant les moments des forces Aq, Af par rapport au point M, on aura,

Moment de Force $Aq = \varpi x (S + r^2 f) . \text{tang.}\, m$,
Moment de Force $Af = \varpi y (S + r^2 f)$.

2°. Le petit solide annulaire, décrit par le petit rectangle $EE'e'e$, est $\varpi t dt dx$, pour l'angle ϖ; et son moment, par rapport au point M, est $\varpi t dt dx \; (b + y - t)$.

Dans ces expressions, il n'y a, pour le présent, que t et x de variables; et il faut commencer par les intégrer, de maniere que les intégrales s'évanouissent lorsque $t = b$, et

reçoivent leurs valeurs completes lorsque $t = b + y$: par-là, on trouvera que la tranche élémentaire produite par le trapézoïde $PMmp = \frac{\varpi dx(by + yy)}{2}$, et que son moment, par rapport au point M, est $\frac{\varpi dx(3by^2 + y^3)}{6}$. Donc le centre de gravité de l'onglet, dont cette même tranche est l'élément, est distant de l'axe AP de la quantité $\frac{\int(3by^2 + y^3)dx}{3\int(2by + y^2)dx}$; et par conséquent la distance du même point à la verticale MT est, $y - \frac{\int(3by^2 + y^3)dx}{3\int(2by + y^2)dx}$: ce qui donne finalement $\frac{\varpi y \int(2by + y^2)dx}{2} - \frac{\varpi \int(3by^2 + y^3)dx}{6}$; pour le moment de l'onglet en question, par rapport à la verticale MT.

4°. La force d'adhérence étant toujours supposée proportionnelle aux surfaces, si l'on nomme F le poids qui exprime l'adhérence pour une surface donnée c^2, il est évident que le moment de l'adhérence de la petite surface décrite par Ee, avec la surface contiguë, par rapport au point M, a pour expression, $\frac{\varpi F. tdt}{c^2}(b + y - t)$, dont l'intégrale est, $\frac{\varpi F.(3by^2 + y^3)}{6c^2}$, en prenant cette intégrale, de maniere qu'elle s'évanouisse lorsque $t = b$, et qu'elle reçoive sa valeur complete lorsque $t = b + y$.

Maintenant, pour l'équilibre, il faut que le moment de la force Aq soit égal à la somme des moments de la force Af, du poids de l'onglet, et de la force d'adhérence. Ainsi on aura l'équation fondamentale :

$$x(S + r^2f).\text{tang.}\, m = y(S + r^2f) + y\int\frac{(2by + yy)dx}{2} - \frac{\int(3by^2 + y^3)dx}{6} + F\frac{(3by^2 + y^3)}{6c^2}.$$

En faisant, pour abréger, $S^2 + r^2f = M$; tang. $m = \lambda$;

$\frac{F}{C^2} = N$: l'équation précédente deviendra :

$$\lambda Mx = My + y \int \frac{(2by + y^2)\,dx}{2} - \int \frac{(3by^2 + y^3)\,dx}{6} + \frac{N(3by^2 + y^3)}{6}.$$

Je différencie deux fois cette équation, en faisant dy constante; et je mets tout d'un même côté; ce qui donne, $(6\lambda M - 3by^2 - 2y^3)\,d^2x - (12by + 9y^2)\,dxdy - N(b+y)\,dy^2 = 0$.

Ensuite je fais $dx = zdy$, et par conséquent $d^2x = dzdy$; ce qui change l'équation en celle-ci:
$(6\lambda M - 3by^2 - 2y^3)\,dz - (12by + 9y^2).\,zdy - N(b+y)\,dy = 0$;
ou en celle-ci :

$$dz - \frac{(12by + 9y^2).\,zdy}{6\lambda M - 3by^2 - 2y^3} - \frac{N(b+y)\,dy}{6\lambda M - 3by^2 - 2y^3} = 0;$$

Équation de la forme $dz + Pzdy + Qdy = 0$, P et Q étant des fonctions de y. Cette équation s'integre par la méthode qui est expliquée dans mon *Calcul intégral*, tome II, art. 653, page 38.

Fin des Recherches sur l'équilibre des voûtes.

PESANTEURS SPECIFIQUES

DE DIFFÉRENTES MATIERES.

J'ai extrait la table suivante du bel ouvrage de Brisson, intitulé : *Pesanteur spécifique des corps.* L'unité de mesure est le poids de l'eau de pluie, ou de l'eau distillée, sous un volume donné, tel que le pied cube. La premiere colonne désigne les matieres comparées ; la seconde, les nombres qui expriment les rapports de leurs pesanteurs spécifiques ; et la troisieme, le poids du pied cube de chacune d'elles.

Matieres comparées.	Rapport des pes. spéc.	Poids du pied cube.			
		liv.	onc.	gros	grains
Eau de pluie,	1,0000	70	0	0	0
Eau distillée,	1,0000	70	0	0	0
Eau de la Seine filtrée,	1,0002	70	0	1	25
Eau de puits,	1,0017	70	1	7	17
Eau de mer,	1,0263	71	13	3	47
Eau de Balaruc,	1,0074	70	8	2	22
Eau de Châtel Guyon,	1,0060	70	6	5	55
Eau de Bourbonne-les-Bains,	1,0057	70	6	3	5
Eau de Vichi,	1,0055	70	6	1	20
Eau de Baredge,	1,0004	70	0	3	24
Eau de Plombieres,	1,0001	70	0	1	5
Eau d'Enghien,	1,0007	70	0	6	7
Eau de Sedlitz,	1,0174	71	3	3	65
Eau de Vals,	1,0068	70	7	4	67
Eau de Forges,	1,0001	70	0	1	5
Eau de Passy ancienne,	1,0030	70	3	2	63

Matieres comparées.	Rapport des pes. spéc.	Poids du pied cube. liv.	onc.	gros	gr.
Eau de Passy ancienne épurée,	1,0027	70	3	0	14
Eau de Passy nouvelle,	1,0035	70	3	7	26
La même épurée,	1,0030	70	3	2	63
Eau de Spa,	1,0009	70	1	0	5
Vin de Bourgogne,	0,9915	69	6	3	60
Vin de Torrins, rouge,	0,9930	69	8	1	20
Vin de Torrins, blanc,	0,9876	69	2	0	65
Vin de Champagne, blanc, mousseux,	0,9979	69	13	5	13
Vin de Bordeaux,	0,9939	69	9	1	25
Vin de Jurançon,	0,9932	69	8	3	5
Vin de Pakaret,	0,9997	69	15	5	22
Vin de Xérez,	0,9924	69	7	3	65
Vin de Malaga,	1,0221	71	8	6	1
Vin de Malvoisie de Madere,	1,0382	72	10	6	20
Vin de Tokai,	1,0538	73	12	2	3
Vin de Constance,	1,0819	75	11	5	59
Biere rouge,	1,0338	72	5	6	61
Biere blanche,	1,0231	71	9	6	70
Cidre,	1,0181	71	4	2	13
Eau-de-vie de Preuve,	0,9131	63	14	5	27
Eau-de-vie double,	0,8630	60	6	4	35
Esprit-de-vin du commerce,	0,8371	58	9	4	30
Esprit-de-vin très rectifié,	0,8293	58	0	6	38
Ether vitriolique,	0,7396	51	12	2	59
Ether nitreux,	0,9088	63	9	6	61
Ether marin,	0,7296	51	1	1	16
Ether acéteux,	0,8664	60	10	2	68
Acide vitriolique,	1,8409	128	13	6	33
Acide nitreux,	1,2715	89	0	0	46
Acide marin,	1,1940	83	9	2	17
Acide arsenical,	1,8731	131	1	9	70

Matieres comparées.	Rapport des pes. spéc.	Poids du pied cube. liv.	onc.	gros	gr.
Vinaigre rouge,	1,0251	71	12	0	65
Vinaigre blanc,	1,0135	70	15	0	69
Vinaigre distillé,	1,0095	70	10	5	9
Vinaigre radical,	1,0626	74	6	0	65
Huile essentielle de térébenthine,	0,8697	60	14	0	37
Huile essentielle d'absinthe,	0,9073	63	8	1	29
Huile essentielle d'estragon,	0,9949	69	10	2	22
Huile essentielle de fenouil,	0,9294	65	0	7	31
Huile essentielle de girofle,	1,0363	72	8	5	18
Huile essentielle de canelle,	1,0439	73	1	1	25
Huile d'olives,	0,9153	64	1	1	6
Huile d'amandes douces,	0,9170	64	3	0	23
Huile de noix,	0,9227	64	9	3	28
Huile de lin,	0,9403	65	13	1	6
Huile de baleine,	0,9233	64	10	0	55
Huile de morue,	0,9233	64	10	0	55
Lait de femme,	1,0203	71	6	5	64
Lait de jument,	1,0346	72	6	6	1
Lait d'ânesse,	1,0355	72	7	6	6
Lait de chevre,	1,0341	72	6	1	39
Lait de brebis,	1,0409	72	13	6	33
Lait de vache,	1,0324	72	4	2	22
Petit lait de vache clarifié,	1,0193	71	5	4	67
Urine humaine,	1,0106	70	1	6	70
Air commun,	0,0012	0	1	3	3
Air pur,	0,0013	0	1	4	0
Gaz méphitique,	0,0019	0	2	0	49
Gaz atmosphérique,	0,0011	0	1	2	48
Gaz inflammable,	0,0001	0	0	0	64
Gaz nitreux,	0,0013	0	1	3	48

28

Matieres comparées.	Rapport des pes. spéc.	Poids du pied cube.			
		liv.	onc.	gros	gr.
Résine commune, dite *poix résine*,	1,0886	76	3	1	62
Résine jaune ou blanche du pin,	1,0727	75	1	3	28
Gomme élastique,	0,9335	65	5	4	12
Camphre,	0,9887	69	3	2	54
Gomme commune,	1,4817	103	11	4	2
Gomme arabique,	1,4523	101	10	4	44
Gomme d'acajou,	1,4456	101	3	0	41
Cire jaune,	0,9648	67	8	4	44
Cire blanche,	0,9686	67	12	6	47
Beurre de cacao,	0,8916	62	6	4	53
Blanc de baleine,	0,9433	66	0	3	70
Graisse de bœuf,	0,9232	64	9	7	63
Graisse de veau,	0,9341	65	6	1	39
Graisse de mouton,	0,9235	64	10	2	40
Suif.	0,9419	65	14	7	31
Graisse de cochon,	0,9368	65	9	1	52
Lard,	0,9478	66	5	4	21
Beurre,	0,9423	65	15	3	1
Sel marin,	2,1250	148	12	0	0
Sel gemme,	2,1430	150	0	1	20
Sel ammoniac,	1,4530	101	11	2	63
Nitre,	1,9000	133	0	0	0
Sel de Glauber,	2,2460	157	3	4	12
Alun,	1,7140	119	15	6	32
Borax,	1,7200	120	6	3	14
Crême de tartre,	1,9000	133	0	0	0
Sel de Saturne,	2,3953	167	10	5	64
Sucre blanc,	1,6060	112	6	5	55
Bois de chéne de 60 ans; cœur,	1,1700	81	14	3	14
Liege,	0,2400	16	12	6	29

Matieres comparées.	Rapport des pes. spécif.	Poids du pied cube. liv.	onc.	gros	gr.
Orme; le tronc,	0,6710	46	15	4	12
Frêne; le tronc,	0,8450	59	2	3	14
Hêtre,	0,8520	59	10	1	66
Noyer de France,	0,6710	46	15	4	12
Saule,	0,5850	40	15	1	43
Tilleul,	0,6040	42	4	3	60
Sapin mâle,	0,5500	38	8	0	0
Sapin femelle,	0,4980	34	13	6	6
Peuplier,	0,3830	26	12	7	49
Pommier,	0,7930	55	8	1	20
Poirier,	0,6610	46	4	2	40
Prunier,	0,7850	54	15	1	43
Olivier,	0,9270	64	14	1	66
Cerisier,	0,7150	50	0	6	29
Buis de France,	0,9120	63	13	3	37
Buis de Hollande,	1,3280	92	15	2	63
Grenadier,	1,3540	94	12	3	60
Syringa,	1,0989	76	14	6	10
Bois de Brésil rouge,	1,0310	72	2	5	55
Bois de campêche,	0,9130	63	14	4	35
Cedre sauvage,	0,5960	41	11	4	12
Cedre de Palestine,	0,6130	42	14	4	35
Cedre des Indes,	1,3150	92	0	6	29
Oranger,	0,7050	49	5	4	58
Citronnier,	0,7263	50	13	3	47
Or fin (24 karats), fondu et non forgé,	19,2581	1348	1	0	41
Le même, fondu et forgé,	19,3617	1355	5	0	60
Argent fin (12 deniers) fondu, et non forgé,	10,4743	733	3	1	52
Le même, fondu et forgé,	10,5107	735	11	7	43
Platine brute en grenailles,	15,6017	1092	1	7	17

Matieres comparées.	Rapport des pes. spécif.	Poids du pied cube.			
		liv.	onc.	gros	gr.
La même, décapée par l'esprit de sel,	16,7521	1172	10	2	59
Platine brute fondue,	14,6263	1023	13	3	47
Platine purifiée fondue,	19,5000	1365	0	0	0
Platine purifiée forgée,	20,3366	1423	8	7	67
Platine purifiée, passée par la filiere,	21,0417	1472	14	5	46
Cuivre rouge, fondu et non forgé,	7,7880	545	2	4	35
Le même, fondu et passé à la filiere,	8,8785	621	7	7	26
Cuivre jaune, fondu et non forgé,	8,3958	587	11	2	26
Le même, fondu et passé à la filiere,	8,5441	598	1	3	10
Fer fondu,	7,2070	504	7	6	52
Fer forgé en barre, écroui ou non écroui,	7,7880	545	2	4	35
Acier ni trempé ni écroui,	7,8331	548	5	0	41
Le même, écroui et non trempé,	7,8404	548	13	1	71
Le même, écroui, ensuite trempé,	7,8180	547	4	1	20
Le même, trempé et non écroui,	7,8163	547	2	2	3
Etain neuf, fondu et non écroui,	7,3013	511	1	3	47
Le même, fondu et écroui,	7,3115	511	12	7	3
Etain commun fondu,	7,9200	554	6	3	14
Plomb fondu,	11,3523	794	10	4	44
Mercure coulant,	13,5681	949	12	2	13
Mercure précipité *per se*,	10,8710	760	15	4	12
Diamant oriental, blanc,	3,5212	246	7	5	69
Diamant oriental, rose,	3,5310	247	2	5	55

Matieres comparées.	Rapport des pes. spéc.	Poids du pied cube. liv.	onc.	gros	gr.
Diamant du Brésil,	3,4444	241	1	5	59
Diamant jaune,	3,5185	246	4	5	55
Rubis oriental,	4,2833	299	13	2	26
Rubis du Brésil,	3,5311	247	2	6	47
Topaze orientale,	4,0106	280	11	6	70
Topaze du Brésil,	3,5365	247	8	7	3
Saphir oriental,	3,9941	279	9	3	10
Saphir du Brésil,	3,1307	219	2	3	5
Grenat de Bohême,	4,1888	293	3	3	47
Emeraude du Pérou,	2,7755	194	4	4	35
Aigue-marine orientale,	3,5489	248	6	6	10
Aigue-marine occidentale,	2,7227	190	9	3	28
Crystal de roche limpide ou de Madagascar,	2,6530	185	11	2	64
Crystal de roche du Brésil,	2,6526	185	10	7	21
Agate orientale,	2,5901	181	4	7	21
Cornaline,	2,6137	182	15	2	54
Pierre à fusil, blonde,	2,5941	181	9	3	10
Pierre meuliere,	2,4835	173	13	4	12
Caillou olivâtre,	2,6067	182	7	4	2
Caillou tacheté,	2,5867	181	1	0	60
Jaspe verd-clair,	2,3587	165	1	5	69
Jaspe verd-brun,	2,6814	187	11	1	25
Granit rouge d'Egypte,	2,6541	185	12	4	53
Granit gris d'Egypte,	2,7279	190	15	1	71
Granit d'un beau rouge,	2,7609	193	4	1	48
Granit jaune,	2,6633	186	6	7	12
Granit verd,	2,8875	202	2	0	0
Grès de paveurs,	2,4158	169	1	5	41
Le même, pénétré d'eau,	2,4519	171	10	1	2
Grès des tailleurs de pierre,	2,0855	145	15	6	6
Le même, pénétré d'eau,	2,2246	155	11	4	30

Matieres comparées.	Rapport des pes. spéc.	Poids du pied cube.			
		liv.	onc.	gros	gr.
Ardoise neuve,	2,8555	199	11	7	26
La même, pénétrée d'eau,	2,8592	200	2	2	31
Pierre noire,	2,1861	153	0	3	33
La même, pénétrée d'eau,	2,2774	159	6	5	36
Pierre à rasoir, blanche,	2,8763	201	5	3	47
Pierre à rasoir, noire et blanche,	3,1311	219	2	6	47
Albâtre oriental blanc, antique,	2,7302	191	2	6	42
Albâtre oriental blanc, demi-transparent,	2,7621	193	5	4	30
Albâtre de Montmartre,	2,6838	187	13	6	61
Marbre de Bourbon-Lancy,	2,6957	188	11	1	34
Marbre dit *Bourbonnois antique*,	2,6805	187	10	1	20
Marbre dit *breche d'Alep*,	2,6867	188	1	0	60
Marbre dit *verrette ou d'Antin*,	2,7166	190	2	4	53
Marbre dit *verrette nouveau*,	2,8546	199	13	1	16
Marbre Campan, verd,	2,7417	191	14	5	46
Marbre Campan, rouge,	2,7242	190	11	0	60
Marbre noir et blanc de Namur,	2,7167	190	2	5	46
Marbre gris-blanc des Pyrénées,	2,7256	190	12	5	27
Marbre dit *breche grise*, de la carriere de Barbesan,	2,7037	189	4	1	11
Marbre noir des carrieres de Biscaye,	2,7067	189	7	4	2
Marbre de tigre,	2,7062	189	6	7	40
Marbre dit *griotte de Flandres*,	2,7080	189	8	7	49
Marbre blanc de Carrare,	2,7168	190	2	6	38
Marbre blanc de Paros,	2,8376	198	10	0	65

Matieres comparées.	Rapport des pes. spéc.	Poids du pied cube. liv.	onc.	gros	gr.
Marbre noir d'Italie,	2,7120	189	13	3	37
Marbre rouge du Piémont,	2,8494	199	7	2	45
Marbre gris de Malte,	2,7054	189	6	0	28
Marbre noir et blanc de Norwege,	2,7281	190	15	3	56
Marbre gris de Norwege,	2,7090	189	10	0	46
Pierre de Saint-Leu, de la carriere de Saint-Leu,	1,6593	116	2	3	24
La même, pénétrée d'eau,	1,9199	134	6	2	22
Pierre de Saint-Leu, de la carriere de Maillet,	1,5781	110	7	3	56
La même, pénétrée d'eau,	1,8817	131	11	4	2
Pierre de Saint-Leu, de la carriere Notre-Dame,	1,8094	126	10	4	16
La même, pénétrée d'eau,	2,0362	142	8	4	25
Pierre de Vergelet du plus gros grain,	1,6542	115	12	5	46
La même, pénétrée d'eau,	1,9325	135	4	3	14
Pierre de Lambourde, du côté de Gentilli,	1,6610	116	4	42	5
La même, pénétrée d'eau,	1,9045	133	5	0	23
Pierre d'Arcueil,	2,0605	144	3	6	6
La même, pénétrée d'eau,	2,1891	153	3	6	24
Pierre grossiere, du fond de Bagneux,	1,9779	138	7	1	71
La même, pénétrée d'eau,	2,1120	147	13	3	37
Pierre de liais, du fond de Bagneux,	2,0778	145	7	1	6
La même, pénétrée d'eau,	2,2280	155	15	26	3
Pierre dite *petit banc*, du val de Meudon,	2,2248	155	11	6	15
Pierre haute, du val de Meudon,	2,2983	160	14	0	55

Matieres comparées.	Rapport des pes. spéc.	Poids du pied cube.			
		liv.	onc.	gros	gr.
Pierre de Vaugirard, dite *clichard*,	2,3574	165	0	2	22
Pierre fine de Vaugirard,	2,4582	172	1	1	34
Pierre de Chaillot,	2,0789	145	8	0	68
Pierre de Saint-Cloud,	2,2011	154	1	1	62
Pierre de Saint-Non,	2,0776	145	6	7	21
Pierre de Saint-Germain,	2,0114	140	12	6	10
Pierre de Conflans Sainte-Honorine, tenant au *banc royal*,	2,3402	163	13	0	14
Pierre de Notre-Dame,	2,3775	166	6	6	29
Pierre d'Ivri,	1,9581	137	1	0	41
Pierre de Saint-Maur,	2,0342	142	6	2	31
Pierre ponce,	0,9145	64	0	1	66
Verre des bouteilles,	2,7325	191	4	3	14
Verre verd ou commun des vitres,	2,6423	184	15	3	1
Verre blanc, ou crystal de France,	2,8922	202	7	2	8
Crystal des glaces de Saint-Gobin,	2,4882	174	2	6	20
Crystal d'Angleterre, dit *Flintglass*,	3,3293	233	0	6	38
Porcelaine dure, de Sevre,	2,1457	150	3	1	34
Porcelaine ancienne de Saxe,	2,4718	173	0	3	24
Porcelaine de la Chine,	2,3847	166	14	6	66

Fin des pesanteurs spécifiques de différentes matieres.

TABLE
DU
COURS DE MATHÉMATIQUES,

PREMIERE PARTIE.
ÉLÉMENTS DE STATIQUE.

SECONDE PARTIE.

ÉLÉMENTS DE DYNAMIQUE.

LIVRE PREMIER.

DU MOUVEMENT CONSIDÉRÉ EN LUI-MÊME.

LIVRE SECOND.

NOTES SUR PLUSIEURS ENDROITS.

RECHERCHES SUR L'ÉQUILIBRE DES VOUTES.

FIN.

ERRATA.

Pag. 1, *lig.* 9, *au lieu de* sorps, *lisez* corps.

Pag. 95, *lig.* 10, *au lieu de* Section IV, *lisez* Section II.

En regard de la page numérotée 152, *au lieu de* 532, *lisez* 153.

En regard de la page numérotée 264, *au lieu de* 268, *lisez* 265.

Pag. 298, *lig.* 1, *au lieu de* théorême, *lisez* problême.



·NOTICE

Extraite du Catalogue des Livres de Fonds et d'Assortiment de Firmin Didot, *Libraire pour les Mathématiques, la Marine, l'Architecture, et les Editions stéréotypes, à Paris, rue de Thionville*, n° 116.

Cours de mathématiques du citoyen Bossut, à l'usage du génie, 7 volumes in-8., br. 37 f.

On vend séparément

Arithmétique et algebre, an 9, 5 f.
Géométrie et application de l'algebre à la géométrie, an 9, 5 f.
Mécanique, dynamique, et statique, an 10. 5 f.
Hydrodynamique, an 4, 2 vol. 10 f.
Traité du calcul intégral, et de calcul différentiel, an 6, 2 vol. 12 f.
Cours de mathématiques du cit. Bossut, à l'usage des écoles publiques, in-8, rare, broché, 6 fr.

Cours de mathématiques, de Bezout, à à l'usage de la marine, 6 vol. in-8, édition originale, br. 19 f. 25 c.

On vend séparément

Arithmétique, suivie d'une instruction sur les nouvelles mesures, et de tables très utiles pour la pratique de la navigation, 2 f. 50 c.
Géométrie, 2 f. 75 c.
Algebre, 3 f.
Mécanique, 2 vol. 6 f. 50 c.
Navigation, 4 f. 50 c.
Cours de mathématiques, à l'usage de l'artillerie, 4 vol. in-8., grand papier, édition originale, br. 20 f.

On vend séparément

La premiere partie, contenant l'arithmétique, la géométrie, la trigonométrie rectiligne, l'application de l'algebre à la géométrie, 2 vol. 10 f.
La seconde partie, contenant la mécanique et l'hydrostatique, et l'application des principes de la mécanique à différents cas de mouvement et d'équilibre, 2 volumes, 10 f.
Théorie générale des équations algébriques, in-4, 1779, br. 16 f.
Elément de géométrie, par A. M. Legendre, quatrieme édition, in-8, br., 6 f.
Elément d'algebre d'Euler, 2 vol. in-8, broché, 12 f.
Traité élémentaire de statique de Monge, in-4., br., 8 f.
Géométrie descriptive de Monge, in-4., broché, 8 f.
Principes de calcul et de géométrie, ou éléments de mathématiques, etc., par Para du Phanjas, in-8, rel., 7 f. 50 c.
Abrégé du Cours de mathématiques de Chrétien Wolf, 3 vol. in-8, rel., 18 f.
Eléments généraux de mathématiques, par Deidier, 2 vol. in-4, rel. 24 f.
Le guide des jeunes mathématiciens, traduit de l'anglais de J. Waad, in-8. relié, 7 f. 50 c.
Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique, par Cagnoli, in-4., 15 f.
Abrégé d'astronomie, par Lalande, in-8., broché, 5 f.
La gnomonique pratique, par don Bédos, in-8., 9 f.
Les sections coniques de l'Hôpital, nouvelle édition, in-4., avec fig. 12 f.
Des infiniment petits, du même, nouvelle édition revue et enrichie de notes très considérables, par Lefébure, in-4., fig. 1781, 12 f.
Méthode des fluxions de Maclaurin, traduites de l'anglais, par Pezenas, 2 vol. in-4., fig., 24 f.
Eléments d'algebre de Maclaurin, traduits par le Cozic, in-4., fig. 12 f.
Théorie acoustico-musicale, ou de la doctrine des sons rapportée aux principes de leur combinaison, par Suremain-Missery, in-8., Paris, 1793, avec 1 pl. br. 5 f.
Description d'une nouvelle machine pour diviser les instruments de mathématiques, par Ramsden, publiée par de la Lande, in-4., avec de belles planch. 6 f.

Ouvrages d'Ozanam.

Récréations mathématiques et physiques, contenant les problêmes les plus curieux d'arithmetique, de géométrie, de ma-

thématiques, d'optique, de musique, d'acoustique, d'astronomie, de géographie, de navigation, d'architecture, de pyrotechnie, de physique, sur l'aimant, l'électricité, la chimie, les phosphores, et les lampes perpétuelles; nouvelle édition, totalement refondue par M. de Montucla, en 4 vol. in-8, avec 90 pl. très bien gravées, 1790. 24 f.

Les éléments d'Euclide, du P. Dechalles, avec l'usage de chaque proposition, pour toutes les parties des mathématiques, in-12, avec 20 planches, nouvelle édit. corrigée et augmentée par Audierne, 1778. 4 f. 50 c.

Traité de l'arpentage et du toisé, ou méthode facile pour arpenter ou mesurer toutes sortes de superficies, avec un nouveau tarif pour les bois de charpente, nouvelle édition, corrigée et augmentée par le même auteur, in-12, avec 12 planches, *sous presse*.

La géométrie pratique, contenant la trigonométrie, avec un traité de l'arithmétique par géométrie, in-12, avec 11 planches, nouv. édit. augm. 3 f. 50 c.

Usage du compas de proportion, suivi d'un traité de la division des champs, par Ozanam, ouvrage revu, corrigé et entièrement refondu par Garnier, in-12, Paris, 1794, avec 15 planches, et trois tables relatives au nouveau système des poids et mesures, prix rel. 4 f.

Méthode de lever les plans et les cartes de terre et de mer, avec toute sorte d'instruments, et sans instruments, nouv. édit. très augment. par Audierne, in-12. fig., *sous presse*.

Cours de mathématiques, qui comprend les parties de cette science les plus utiles à un homme de guerre, en 5 vol. in-8. avec plus de 200 planches.

La trigonométrie rectiligne et sphérique, nouv. édit. augm.; on y a joint les tables des sinus, tangentes et sécantes, et des logarithmes, par Adrien Ulacq, corrigée avec la plus grande exactitude, in-8. avec 6 planches, 6 f.

La mécanique, où il est traité des machines simples et composées, de l'hydrostatique, et des machines hydrauliques, etc., in-8., avec 28 planches. 6 f.

La perspective théorique et pratique, où l'on enseigne la méthode de mettre toutes sortes d'objets en perspective, et d'en représenter les ombres causées par le soleil, ou par quelque autre lumiere, nouv. édit., corrigée, in-8, 1739, avec 56 planches. 6 f.

La géographie, ou cosmographie, où l'on traite de la sphere de la connoissance des corps célestes, des différents systêmes du globe, etc. in-8. avec 14 planches. 6 f.

La gnomonique, où l'on donne la maniere de faire des cadrans solaires sur toutes sortes de surfaces, etc. in-8., avec 30 planches. 6 f.

Tables portatives de logarithmes, contenant les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 108000; les logarithmes des sinus et tangentes, de seconde en seconde, pour les cinq premiers degrés, de dix en dix secondes pour tous les degrés du quart de cercle, et, suivant la nouvelle division centésimale, de dix millieme en dix millieme; précédées d'un discours préliminaire sur l'explication, l'usage et la sommation des logarithmes, et sur leur application à l'astronomie, à la navigation, à la géométrie pratique, et aux calculs d'intérêts; suivies de nouvelles tables plus approchées, et de plusieurs autres, utiles à la recherche des longitudes en mer, etc. par Callet. Edition stéréotype, gravée, fondue et imprimée par Firmin Didot, 1 v. in-8. grand papier, rel. 14 f.

Idem in-4. papier fin. 30 f.

Tables de logarithmes par J. Lalande, stéréotypes, in-18. br. 3 f.

Tables des quarrés et des cubes, et de leurs racines représentées par leurs nombres naturels depuis l'unité jusqu'à dix mille, par Seguin, an 8, br. 3 f.

Description et usage du cercle de réflexion, avec la maniere de calculer les observations nautiques, par Borda, petit in-4. avec fig. br. 4 f. 20 c.

Supplément à la trigonométrie rectiligne, et sphérique de Bezout, par F. Callet, in-4. hr. 3 f. 50 c.

Traité de mécanique, appliqué à la construction des vaisseaux et autres bâtiments, traduit de l'espagnol de don Georges Juan, par Lévêque, avec notes et additions, 2 vol. in-4. 30 f.

Traité du navire, par Bougner, in-4. 15 f.

Eléments de l'architecture navale, par Duhamel du Monceau, in-4. 18 f.

Théorie complete de la construction et de la manœuvre des vaisseaux, par Euler, in-8, fig. 1776. 6 f.

La théorie de la manœuvre des vaisseaux, réduite en pratique par Pitot, de l'académie des sciences, in-4. avec 8 pl. 12 f.

Traité pratique du grèement des vaisseaux et autres bâtiments de mer, par Lescall

lier, 2 volumes in-4. avec 34 pl. broc., 1791. 30 f.

Vocabulaire de marine, anglais et français, par Leacallier, in-8. 1785, fig. rel. 15 f.

L'art de la guerre sur mer, ou nouvelle tactique navale, par de Grenier, chef de division, in-4. grand pap. fig. br. 6 f.

Tactique navale, traduite de l'anglais par Lescallier, in-4. br. 15 f.

Installation des vaisseaux, par E. Burgues Missiessy, 1 vol. in-4. br. 15 f.

Arrimage des vaisseaux, par le même, in-4. br. 15 f.

Recherches sur l'artillerie en général, et particulièrement sur celle de la marine, par Texier de Norbec, 2 vol. in-8., fig. brochés. 21 f.

Description des projets et de la construction des ponts de Neuilly, de Mantes, d'Orléans, et autres, etc. par Perronet, in-4. grand papier, avec un volume de planch. forme d'atlas, br. en cart. 90 f.

Nouvelle architecture hydraulique, par R. Prony, membre de l'institut national des sciences et arts, directeur de l'école des ponts et chaussées et du cadastre, in-4, grand papier, avec figures.

Tome premier, contenant un traité de mécanique à l'usage de ceux qui se destinent aux constructions de tous les genres, et des artistes en général. Prix, broché, 24 f.

Tome II, contenant la description détaillée des machines à feu. Prix, br. 36 f.

Tome III, contenant un traité des machines à élever l'eau. *Sous presse.*

Architecture hydraulique de Bélidor, 4 vol. in-4. rel. 100 f.

Suite de l'architecture hydraulique : Essai sur la construction la plus avantageuse des machines hydrauliques, et particulièrement des moulins à bled, par Fabre, in-4. gr. papier. 15 f.

Essai sur la théorie des torrents et des rivieres, par le même, in-4. rel. 14 f.

Principes d'hydraulique, vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du gouvernement, par Dubuat, 2 vol. in-8. rel. 14 f.

Nouveaux principes d'hydraulique, par Bernard, directeur-adjoint de l'observatoire de la marine de Marseille, in-4., fig. rel. 15 f.

Dictionnaire d'architecture hydraulique et civile, in-4. par Daviler, gr. pap. 16 f.

Théorie des fleuves, avec l'art de bâtir dans leurs eaux et de prévenir leurs ravages, in-4. grand pap. avec 13 pl. *Rare.*

Recherches sur la construction la plus avantageuse des digues, par Bossut et Viallet, in-4., 7 grandes pl. nouv. édit. revue et corrigée, an 8, petit papier, broché, 4 f.

Grand papier, 7 f.

Traité de stéréotomie, ou la théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, par Frézier, 3 vol. in-4. 45 f.

Architecture pratique de Bullet, in-8. rel. 1788. 7 f.

L'art d'économiser le bois, ou procédés de feux économiques, traduit de l'allemand de Sachtleben, par Goy, in-8. 1792, avec 14 pl. br. 3 f.

Les lois des bâtiments, par Desgodets, 1781, in-8. 6 f.

L'art du trait de charpenterie, par Fourneau, en quatre parties in-folio, qui se vendent séparément, br. en cart. 36 f.

Traité analytique de la résistance des solides, par Girard, in-4. an 6, br. 13 f.

LIVRES NOUVEAUX.

Concordance perpétuelle de l'annuaire républicain avec l'ancien calendrier, et de l'ancien calendrier avec l'annuaire républicain. Par A. C. Lefebvre, directeur des postes, in-8. 5 fr.

Traité pratique des feux d'artifice pour le spectacle et pour la guerre, avec les petits feux de table et d'artifice à l'usage des théâtres, par A. M. Th. Morel, 1 vol. in-8. fig. prix br. 4 f. 50 c.

Théorie purement algébrique des quantités imaginaires, et des fonctions qui en résultent, par Suremain Missery, 1 vol. in-8. br. 5 f.

Instruction abrégée sur les nouvelles mesures, avec des tables de rapports et de réduction, par Ch. Haros, employé au cadastre, approuvée par l'institut, in-12. br. 1 f. 50 c.

Eléments de mathématiques, à l'usage des écoles nationales, par Roger Martin, membre du corps législatif, et professeur de physique expérimentale à Toulouse, vol. in-8., prix br. 6 f.

L'art du calcul astronomique des navigateurs, porté à un plus haut degré d'exactitude que celui auquel il étoit déja parvenu, quoique souvent simplifié, et démontré de maniere à être fort aisément compris par tous ceux qui ont quelques notions de mathématiques et de l'astronomie, par J. B. E. Dubourguet, ancien navigateur, et professeur

de mathématiques au Prytannée français, in-4., prix br. 3 f. 50c.

SOUS PRESSE.

L'Art du Charpentier, par Hassenfratz, in-4.

Dictionnaire de la marine anglaise, par Ch. Romme, 2 vol. in-8.

Essai de Statique chimique, par Berthollet, in-8.

Eléments de l'art de la Teinture, par le même, in-8.

ÉDITIONS STÉRÉOTYPES.

Les éditions stéréotypes publiées jusqu'au premier germinal an 10, sont : Fables et Contes de La Fontaine.—OEuvres de J. Racine et figures. — J. B. Rousseau.—Boileau.—Télémaque. —Chefs-d'œuvre de P. et Th. Corneille. —Moliere. — Malherbe. — Voltaire ; Henriade, Poëmes, Epîtres, Contes en vers, Théâtre et figures, Pucelle. — Regnard. — Observations sur l'Hist. de France, par Thouret.

Virgilius. — Phædrus. — Cornelius Nepos. — Horatius. — Sallustius.

The Vicar of Wakefield. — Letters of Montague. — The sentimental Journey. — Fables by Gay and Moore.

Aminta di Tasso.

Soixante-deux vol. in-18, qui se vendent séparément, et dont la collection coûte brochée, en pap. ordin. 59 f. 90 c.

Et chaque vol. en général. 85 c.

— Pap. fin.... 88 f. 60 c. *id.* 1 f 35 c.

— Pap. vélin.. 205 50 *id.* 3 20

— Gr. pap. vél. 289 50 *id.* 4 60

Les Essais de Michel Montaigne, 4 vol. in-12, broch. 8 f. 50 c.

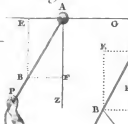
— *Idem*, in-8. papier fin, 15 f. 50 c.

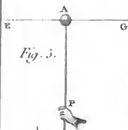
— Papier vélin, 40 f. 50 c.

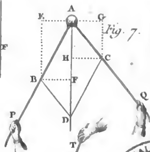
Voyage sentimental de Sterne, suivi des Lettres d'Yorick à Elisa ; traduction nouvelle par Paulin Crassous, accompagnée de notes historiques et critiques, 5 v. in-18. Prix br. pap. ord. 3 f. 60 c.

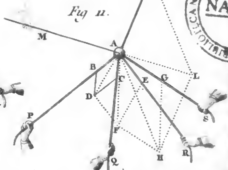
— Papier fin, 6 f.

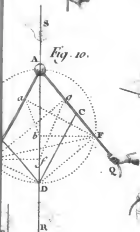
— Papier vélin, 12 f.



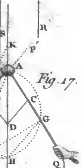


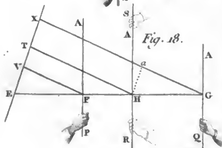


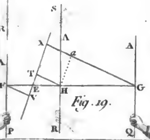


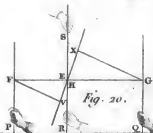




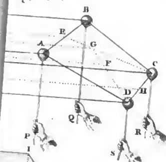


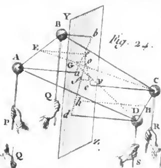


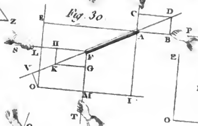


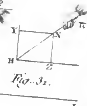


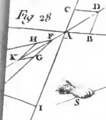
de la Gardette del.

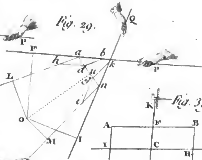


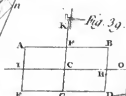


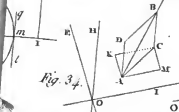


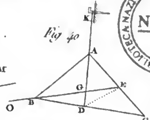














de la Gardette del. et Sculp.

Fig 45.

Fig. 41.

Fig 49

Fig. 50

Fig 51

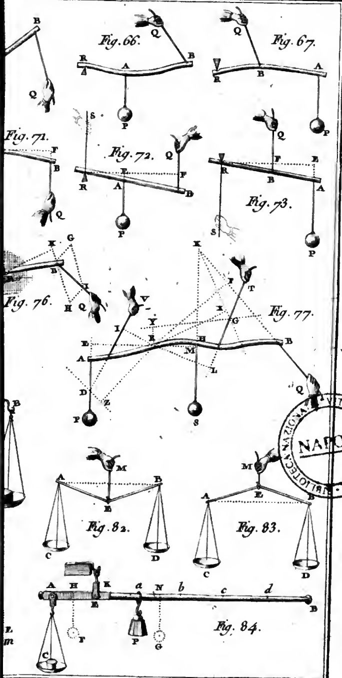
Fig. 56

Fig 61

Fig 62.

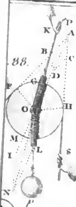


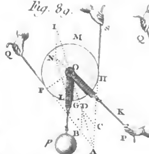
de la Gardette del et Sculp

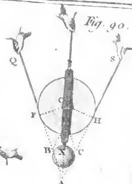


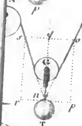
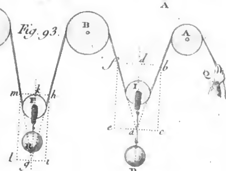
de la Gardette del. et Sculp.

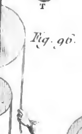
4.

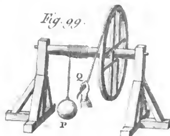




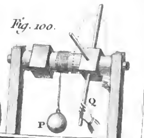




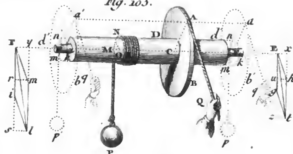




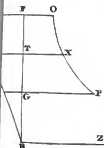


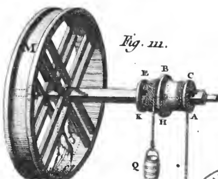


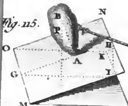
de la Gardette del. et Sculp.

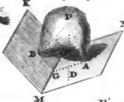


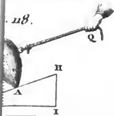


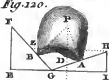


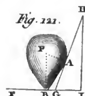












de la Gardette del. et Sculp.

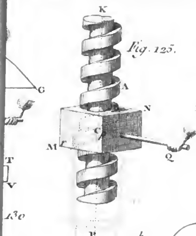


Fig. 125.

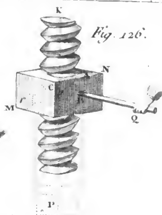


Fig. 126.

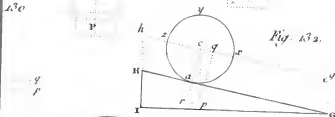


Fig. 132.

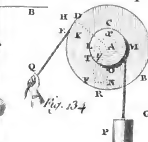


Fig. 134

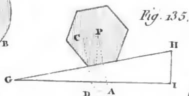


Fig. 135.

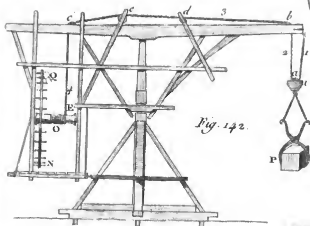
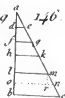
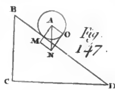
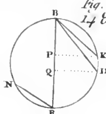
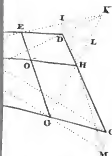


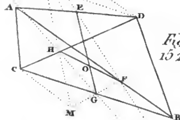
Fig. 142.

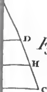

Fig 146.
a
d
e
f
g
h
k
l
m
o
n
r
b
c

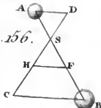

B
A
O
M
N
Fig. 147.
C
D

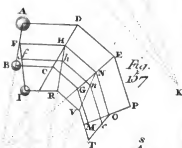

Fig. 148.
B
P
K
Q
D
N
R

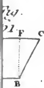

K
I
E
D
L
O
H
G
C
M

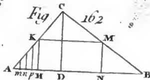

I
L
A
E
D
Fig. 152.
H
C
O
F
G
M
B

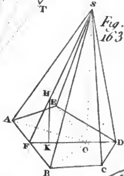

D
H
C

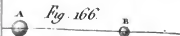

A
D
Fig. 156.
S
H
F
C
B

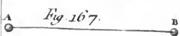

A
D
F
H
E
f
h
B
C
N
Fig. 157
G
n
I
R
K
V
P
O
M
c
T

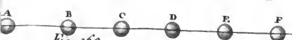

F
C
B


C
Fig 162
K
M
A
D
N
B

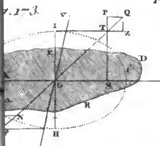

S
Fig. 163
H
E
A
F
K
O
D
B
C

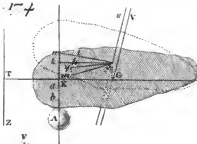

A
Fig. 166.
B

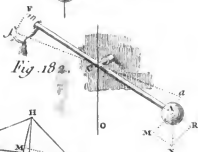

A
Fig. 167.
B

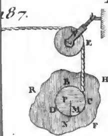

A
B
C
D
E
F
Fig 169.

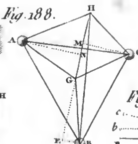


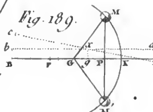

.173.

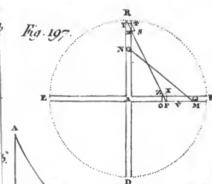

Fig. 174

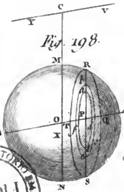

Fig. 182.

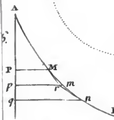

187.


Fig. 188.


Fig. 189.


Fig. 197.


Fig. 198.





D

E

E

D

E

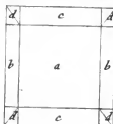
E

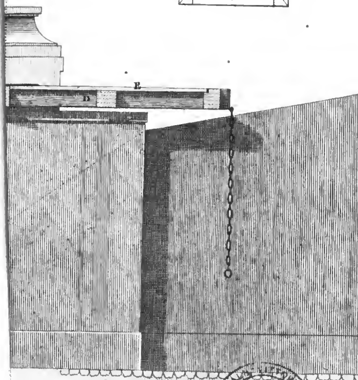
D

2 3. *Toises.*

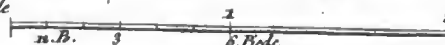
Profil des Fleches per.^mont à leur longueur.

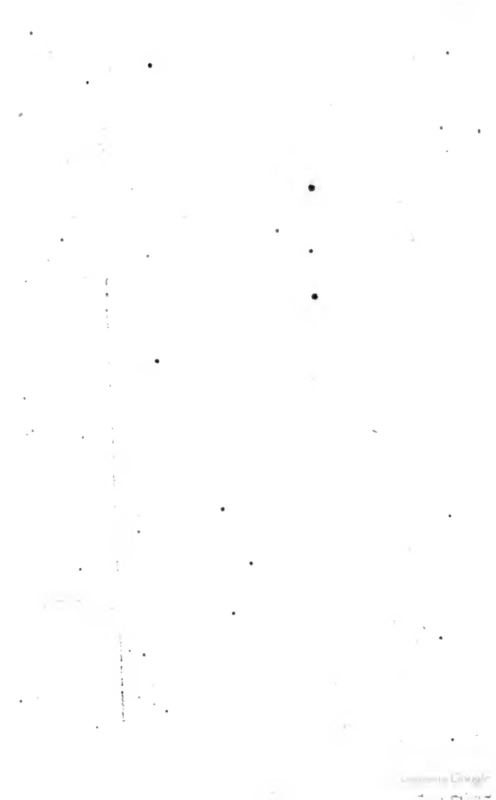
Fig. A.

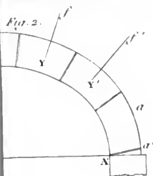


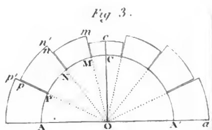


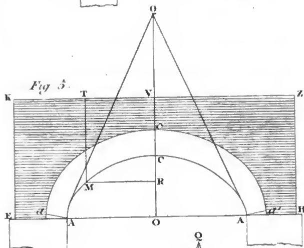




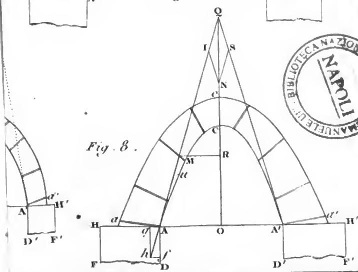












Gravé par Gatte.

Fig. 10.

